Prof. Dr. Holger Stark http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss08/pvbs/quant/
Dr. Vasily Zaburdaev
Dipl. Phys. Sebstian Heidenreich Christin David
Dipl. Phys. Valentin Flunkert Christopher Wollin

4. Übungsblatt zur Theoretische Physik II Quantenmechanik

Abgabe: Montag 19.05. bis 12:00 in den Briefkasten
Achtung: Unbedingt den eigenen Namen und Matrikelnr. sowie den Namen des Tutors und das Tutorium angeben. **Der Zettel wird sonst nicht korrigiert!**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte!

Aufgabe 10 (5 Punkte): *Translationsoperator*
Betrachten Sie den Oparator $\hat{T}_\xi$, der die Wellenfunktion $\psi(x)$ von x nach $x+\xi$ verschiebt, d.h.

$$\hat{T}_\xi \psi(x) = \psi(x+\xi).$$

1. Stellen Sie den Translationsoperator $\hat{T}_\xi$ mit Hilfe des Impulsoperators $\hat{p}$ dar.
2. Zeigen Sie ferner, dass
$$T_\xi x T_\xi^{-1} = x + \xi$$
gilt.

Aufgabe 11 (5 Punkte): *hermitesche Operatoren*
Wie in der Vorlesung definiert ist ein Operator $\hat{A}^\dagger$ adjungiert zu $\hat{A}$ wenn

$$\langle \phi | \hat{A} \psi \rangle = \langle \hat{A}^\dagger \phi | \psi \rangle$$

für alle ψ, ϕ gilt. Ein Operator heißt hermitesch, wenn ferner $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ gilt. Überprüfen Sie mit dieser Definition ob die folgenden Operatoren hermitesch sind.

1. $\hat{A}_1 = \hat{x}\hat{p}$
2. $\hat{A}_2 = \hat{p}\hat{x}$
3. $\hat{A}_3 = 1/2(\hat{p}\hat{x} + \hat{x}\hat{p})$

Aufgabe 12 (10 Punkte): *Hilbertraum*
Der fundamentale Raum zur Beschreibung quantenmechanischer Zustände ist der Hilbertraum $\mathfrak{H}\{\langle .|.\rangle, \mathbb{C}\}$. Hierbei bezeichnet $\langle .|.\rangle$ das in der Vorlesung eingeführte hermitesche Skalarprodukt. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen.

1. Der Raum der quadratsummierbaren Folgen über $\mathbb{C}$, d.h.
$l_2 = \{f | f = \{f_n\}_{n=1}^\infty, f_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^\infty |f_n|^2 < \infty\}$ mit dem Skalarprodukt $\langle f|g\rangle = \sum_{n=1}^\infty f_n^* g_n$ ist ein Hilbertraum.
Hinweis:
Die Verknüpfung $+$ und die Skalarmultiplikation ($\alpha \in \mathbb{C}$) ist definiert durch
$$(f+g) := \{f_n + g_n\}_{n=1}^\infty, \;\; \alpha f := \{\alpha f_n\}_{n=1}^\infty.$$
Es darf angenommen werden, dass der l_2 vollständig ist. Für den expliziten Beweis gibt es Bonuspunkte.

2. Der Raum der komplexwertigen stetigen Funktionen über dem endlichen Intervall $[a, b]$ mit dem Skalarprodukt $\langle f|g\rangle = \int_a^b f(x)^* g(x) dx$ ist ein Hilbertraum.

Aufgabe 13 (10 Punkte): *Linear operators*

The momentum operator $\hat{\boldsymbol{p}}$ is defined as follows: $\hat{\boldsymbol{p}} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}$.

1. Find the commutator $[f(\boldsymbol{r}), \hat{\boldsymbol{p}}]$.

2. The operator of the form $f(\hat{\boldsymbol{p}})$, where the function f can be represented by its Taylor expansion $f(p) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n p^n$, should be understood as $\hat{f} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \hat{\boldsymbol{p}}^n$. By using this definition find the commutator $[f(\boldsymbol{p}), \boldsymbol{r}]$

3. Prove the Jacobi identity for linear non-commuting operators $\hat{A}$,$\hat{B}$, and $\hat{C}$:

$$\left[\hat{A}, \left[\hat{B}, \hat{C}\right]\right] + \left[\hat{B}, \left[\hat{C}, \hat{A}\right]\right] + \left[\hat{C}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] = 0$$

4. By using the following representation of the exponential function of an operator $e^{\hat{A}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^n}{n!}$, prove the relation:

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{}A} = \hat{B} + \left[\hat{A}, \hat{B}\right] + \frac{1}{2!}\left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] + ...$$

5. Show that for two operators A and B, whose commutator is equal to a number c: $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = ic$, the following relation holds:

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-ic/2}.$$