Prof. Dr. Holger Stark http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss08/pvbs/quant/
Dr. Vasily Zaburdaev
Dipl. Phys. Sebstian Heidenreich Christin David
Dipl. Phys. Valentin Flunkert Christopher Wollin

5. Übungsblatt zur Theoretische Physik II Quantenmechanik

Abgabe: Montag 26.05. bis 12:00 in den Briefkasten
Achtung: Unbedingt den eigenen Namen und Matrikelnr. sowie den Namen des Tutors und das Tutorium angeben. **Der Zettel wird sonst nicht korrigiert!**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte!

Aufgabe 14 (10 Punkte): *Legendre Polynome*

1. Zeigen Sie allgemein, dass die Eigenwerte eines hermiteschen Operators reell sind und die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal zueinander sind.

2. Gegeben Sei der Operator
$$A = (1 - x^2)\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx}.$$
Zeigen Sie, dass der Operator bzgl. des Skalarproduktes $\langle f|g\rangle = \int\limits_{-1}^{1} dx f(x)g(x)$ hermitesch ist.

3. Die Legendre Polynome
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$$
sind Eigenfunktionen des Operators A:
$$AP_n(x) = -n(n+1)P_n(x)$$
Zeigen Sie:
$$\langle P_n|P_m\rangle = \delta_{nm}\frac{2}{2n+1}$$
Tipp: Benutzen Sie $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx = 2^{2n+1}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

4. Bonusaufgabe:
Zeigen Sie, dass die Legendre Polynome tatsächlich die Eigenwertgleichung erfüllen.
Tipp:
Zeigen Sie zunachst
$$(1-x^2)\frac{d}{dx}(x^2-1)^n + 2nx(x^2-1)^n = 0$$
und leiten Sie diese Gleichung mit der Leibnizregel $n+1$ *mal nach* x *ab.*

5. Übung TPII SS2008

Aufgabe 15 (10 Punkte): *Ehrenfest'sches Theorem*

1. Zeigen Sie $[\hat{p}_k, \hat{r}_l] = -i\hbar\delta_{kl}$, wobei $\underline{\hat{p}}$ der Impuls- und $\underline{\hat{r}}$ der Ortsoperator ist.
2. Bestimmen Sie mit Hilfe der Schrödingergleichung die Bewegungsgleichung für den Erwartungswert eines (nicht explizit zeitabhängigen) Operators $\hat{A}$:

$$-i\hbar\frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle = \langle[\hat{H}, \hat{A}]\rangle$$

3. Beweisen und interpretieren Sie die folgenden Ehrenfestgleichungen :
   (a) $\frac{d}{dt}\langle\underline{\hat{p}}\rangle = \langle\underline{\hat{F}}\rangle$
   (b) $\frac{d}{dt}\langle\underline{\hat{r}}\rangle = \frac{1}{m}\langle\underline{\hat{p}}\rangle$
   (c) $\frac{d}{dt}\langle\hat{L}_z\rangle = \langle\hat{T}_z\rangle$

   Hierbei ist

$$\underline{\hat{L}} = \underline{\hat{r}} \times \underline{\hat{p}},$$
$$\underline{\hat{F}} = -\nabla V(\mathbf{r}),$$
$$\underline{\hat{T}} = \underline{\hat{r}} \times \underline{\hat{F}}.$$

Aufgabe 16 (10 Punkte): *Uncertainty principle*

By using the Cauchy-Schwarz inequality show that for any two Hermitian operators A and B the following uncertainty principle holds:

$$\triangle\hat{A}\triangle\hat{B} \geq \frac{1}{2}\left|\left\langle\left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right\rangle\right|,$$

where

$$\triangle\hat{A} = \left\langle\left(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle\right)^2\right\rangle.$$