Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 4. Juni 2008

Prof. Dr. Holger Stark http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss08/pvbs/quant/
Dr. Vasily Zaburdaev
Dipl. Phys. Sebstian Heidenreich Christin David
Dipl. Phys. Valentin Flunkert Christopher Wollin

8. Übungsblatt zur Theoretische Physik II Quantenmechanik

Abgabe: Montag 16.06. bis 12:00 in den Briefkasten
Achtung: Unbedingt den eigenen Namen und Matrikelnr. sowie den Namen des Tutors und das Tutorium angeben. **Der Zettel wird sonst nicht korrigiert!**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte!

Aufgabe 23 (10 Punkte): *Harmonischer Oszillator*
Der harmonische Oszillator ist durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

charakterisiert.

1. Begründen Sie die Bezeichnungen von $\hat{a}$ und $\hat{a}^+$ als Erzeugungs- und Vernichtungsoperator. Berechnen Sie hierzu $\hat{N}\hat{a}^+|n\rangle$ und deuten Sie das Ergebnis.
2. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion die Normierung in $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^+)^n|0\rangle$ und auch die folgenden Gleichungen:
$$\langle n+1|\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}, \quad \langle n-1|\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}, \quad \langle n|m\rangle = \delta_{nm}.$$
3. Bestimmen Sie die Unschärfen $\Delta\hat{x}_i|_n = +\left(\langle n|\hat{x}_i^2|n\rangle - (\langle n|\hat{x}_i|n\rangle)^2\right)^{1/2}$ sowie $\Delta\hat{p}_i|_n$ im Formalismus der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren und diskutieren Sie $\Delta\hat{x}_i\Delta\hat{p}_i|_n$.

Aufgabe 24 (10 Punkte): *harmonischer Oszillator im $\mathcal{E}$-Feld*
In der Vorlesung wurde der harmonische Oszillator eingeführt und diskutiert. Betrachten Sie hier den geladenen harmonischen Oszillator in einem konstanten elektrischen Feld $\mathcal{E}$:

$$\hat{H}_q = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 - q\mathcal{E}\hat{x}.$$

Die Eigenwerte und der Eigenvektoren können mit Hilfe des bereits diskutierten gewöhnlichen harmonischen Oszillators bestimmt werden.

1. Zeigen Sie, dass es eine unitäre Transformation gibt, die den Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators $\hat{H}_{osz}$ in $\hat{H}_q$ überführt, d.h. $\hat{U}\hat{H}_{osz}U^\dagger = \hat{H}_q$
Hinweise:
   (a) Verwenden Sie $\hat{U}(\lambda) = e^{-\lambda(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)}$ bzw. $\hat{U}^\dagger(\lambda) = e^{\lambda(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)}$, wobei $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ die Vernichter und Erzeuger des harmonischen Oszillators sind.
   (b) Zeigen Sie zunächst $\hat{U}(\lambda)\hat{a}^\dagger\hat{U}^\dagger(\lambda) = \hat{a}^\dagger - \lambda$ und $\hat{U}(\lambda)\hat{a}\hat{U}^\dagger(\lambda) = \hat{a} - \lambda$
   (c) Wählen Sie λ geschickt.
2. Geben Sie die Energieeigenwerte des geladenen harmonischen Oszillators an.

8. Übung TPII SS2008

Aufgabe 25 (10 Punkte): *kohärente Zustände*
Kohärente (quasiklassische) Zustände ψ_α sind Eigenzustände des Erzeugungsoperators $\hat{a}$.

1. Zeigen Sie, dass kohärente Zustände nicht orthogonal sind, d.h. $\langle\psi_\alpha|\psi'_\alpha\rangle = e^{-|\alpha-\alpha'|^2}$.

2. Beweisen Sie die Vollständigkeit:

$$\frac{1}{\pi}\int\int d\alpha_1\ d\alpha_2\ \psi^*_\alpha(x)\ \psi_\alpha(x') = \delta(x-x').$$

3. Zeigen Sie für kohärenten Zustände die Heisenbergsche Unschärferelation $\triangle x \triangle p = \frac{\hbar}{2}$.

4. Leiten Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte für zeitabhängige Zustände ab:

$$|\psi_\alpha(x,t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\xi_0}\exp[-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{\xi_0^2}].$$