Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 11. Juni 2008

Prof. Dr. Holger Stark http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss08/pvbs/quant/
Dr. Vasily Zaburdaev
Dipl. Phys. Sebstian Heidenreich Christin David
Dipl. Phys. Valentin Flunkert Christopher Wollin

9. Übungsblatt zur Theoretische Physik II Quantenmechanik

Abgabe: Montag 23.06. bis 12:00 in den Briefkasten
Achtung: Unbedingt den eigenen Namen und Matrikelnr. sowie den Namen des Tutors und das Tutorium angeben. **Der Zettel wird sonst nicht korrigiert!**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte!

Aufgabe 26 (8 Punkte): *Harmonischer Oszillator in Matrixdarstellung*
Wir verwenden die Eigenzustände $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$ des Teilchenzahloperators $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ als Basisvektoren des Hilbertraums:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad \ldots$$

Berechnen Sie die Matrixdarstellung des Erzeugungsoperators $\hat{a}^\dagger$, des Vernichtungsoperators $\hat{a}$, des Ortsoperators $\hat{x}$, des Impulsoperators $\hat{p}$ und des Hamiltonoperators $\hat{H}$ in dieser Basis.

Aufgabe 27 (12 Punkte): *3-dim Harmonischer Oszillator*

Der isotrope 3-dimensionale harmonische Oszillator ist durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2m}\hat{p}_i^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}_i^2$$

charakterisiert.

1. Zeigen Sie, dass mit $\hat{a}_i^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2}}[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{q}_i - i\frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\hat{p}_i]$ die Relationen $[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j] = -\delta_{ij}$ und $[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0$ gelten, und der Hamiltonoperator die folgende Form annimmt:
$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{3} \hbar\omega \left(\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i + \frac{1}{2}\right)$$

2. Geben Sie eine Formel für die Energieeigenwerte E_n $(n = 0, 1, \ldots)$ des Hamiltonoperators an. (Hierbei ist $n = 0$ der Grundzustand, $n = 1$ der erste angeregte Zustand usw.).
Welche Entartung hat das Energieniveau E_n?
D.h. wieviele linear unabhängige Wellenfunktionen haben dieselbe Energie E_n?
Tipp: Das Problem ist äquivalent zu der Frage auf wieviele Arten man n Kugeln auf 3 Töpfe verteilen kann.

3. Die z-Komponente des Drehimpulsoperators ist definiert durch $\hat{L}_3 := \hat{q}_1\hat{p}_2 - \hat{q}_2\hat{p}_1$. Zeigen Sie, dass $\hat{L}_3 = i\hbar(\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2)$ gilt. Berechnen Sie $[\hat{H}, \hat{L}_3]$.

Aufgabe 28 (12 Punkte): *Coherent states and wave packet*
Coherent states minimize the uncertainty relation for coordinate and momentum for the linear oscillator problem. Take the wave function in the general form of a wave packet:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/4}(\delta x)^{1/2}} \exp\left\{ \frac{i\overline{p}x}{\hbar} - \frac{(x-\overline{x})}{4(\delta x)^2} - i\phi(t) \right\}.$$

Here $\overline{x} = \langle x(t) \rangle$ and $\overline{p} = \langle p(t) \rangle$ are the mean values of coordinate and momentum respectively. δx is an unknown constant, and $\phi(t)$ is an unknown function of time.

1. Find the temporal evolution of $\overline{x}$ and $\overline{p}$ by using the Ehrenfest theorem.
2. By substituting the above expression for $\Psi(x,t)$ into the Schrödinger equation for the linear oscillator find unknown δx and $\phi(t)$.
3. Show that the obtained solution indeed minimizes the uncertainty relation (use the results from the previous home tasks).