Prof. Dr. Holger Stark http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss08/pvbs/quant/
Dr. Vasily Zaburdaev
Dipl. Phys. Sebstian Heidenreich Christin David
Dipl. Phys. Valentin Flunkert Christopher Wollin

11. Übungsblatt zur Theoretische Physik II Quantenmechanik

Abgabe: Montag 7.07. bis 12:00 in den Briefkasten
Achtung: Unbedingt den eigenen Namen und Matrikelnr. sowie den Namen des Tutors und das Tutorium angeben. **Der Zettel wird sonst nicht korrigiert!**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte!

Aufgabe 32 (10 Punkte): *Larmorpräzession*

Ein Wasserstoffatom befinde sich in einem homogenen zeitlich konstanten Magnetfeld $\underline{B} = (B_x, 0, 0)$. Zum üblichen Hamilton-Operator des Wasserstoffatoms $\hat{H}_0$ kommt dann ein Zusatzterm $\hat{H}_1 = -\frac{e}{2m_e}\underline{B} \cdot \hat{\underline{L}}$, der die Wechselwirkung des magnetischen Momentes des Elektrons mit dem Magnetfeld beschreibt.

1. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Erwartungswerte $\langle \hat{L}_i \rangle$ der Komponenten des Drehimpulsoperators auf. *Hinweis:*
   Ehrenfestsches Theorem.

2. *Lösen sie die Bewegungsgleichungen für den Fall, dass sich das Elektron anfänglich im $\hat{L}_z$-Eigenzustand $|n = 2, l = 1, m = 1\rangle$ befindet.*

Aufgabe 33 (10 Punkte): *Spin-Messung*
In dieser Aufgabe soll anhand des Spins der Einfluss einer Messung auf den Zustand untersucht werden. Gegeben sei ein Teilchen mit dem Spin $s = \frac{1}{2}$. Die Pauli'schen Spin Matritzen sind gegeben durch

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Zeigen Sie, dass die Paulimatrizen jeweils die Eigenwerte $\lambda_\uparrow = 1$ (spin up) und $\lambda_\downarrow = -1$ (spin down) haben. Berechnen Sie die zugehörigen *normierten* Eigenvektoren:
   $|\uparrow_x\rangle, |\downarrow_x\rangle, |\uparrow_y\rangle, |\downarrow_y\rangle, |\uparrow_z\rangle, |\downarrow_z\rangle$.

2. Das Teilchen befinde sich im Zustand

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(|\uparrow_z\rangle + 3|\downarrow_z\rangle).$$

   Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten $p(s_x =\uparrow)$, $p(s_x =\downarrow)$ und $p(s_z =\uparrow)$, $p(s_z =\downarrow)$ an bei einer Messung des Spins in x-Richtung bzw. in z-Richtung spin up bzw. spin down zu messen.

3. Eine Messung des Spins in x-Richtung ergebe spin up. Wie ist der Zustand des Teilchens nach der Messung? Geben Sie für den neuen Zustand die Wahrscheinlichkeiten $p(s_x =\uparrow)$, $p(s_x =\downarrow)$, $p(s_z =\uparrow)$ und $p(s_z =\downarrow)$.

Tipp: Benutzen Sie die Vorlesungsmitschrift und das Handout "Axiome der Quantenmechanik".

11. Übung TPII SS2008

Bonusaufgabe 34 (10 Zusatzpunkte): *Spin-Rotation*
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der Operator

$$\hat{U}(\underline{\alpha}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{\alpha}\cdot\hat{\underline{L}}}$$

einen Zustand um die $\underline{\alpha}$-Achse um den Winkel $|\underline{\alpha}|$ dreht. In dieser Aufgabe soll der Zustand eines Spin-$1/2$ Teilchen um $360°$ um die x-Achse gedreht werden.

1. Zeigen Sie, dass sich der Drehoperator um die x-Achse

   $$U(\alpha) = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha S_x} \qquad (S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x)$$

   darstellen lässt durch

   $$U(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) & -i\sin(\alpha/2) \\ -i\sin(\alpha/2) & \cos(\alpha/2) \end{pmatrix}.$$

   Tipp:
   Benutzen Sie die Reihendarstellung von $\sin$, $\cos$ und der e-Funktion und die Identität $\sigma_x^2 = \mathbb{1}$

2. Der Zustand $|\uparrow_z\rangle = (1,0)$ wird nun um den Winkel α gedreht

   $$|\psi_\alpha\rangle = U(\alpha)|\uparrow_z\rangle.$$

   Berechnen Sie die Erwartungswerte von S_y und S_z als Funktion von α.

3. Ist $|\psi_{\alpha=2\pi}\rangle = |\uparrow_z\rangle$?

Bonusaufgabe 35 (10 Zusatzpunkte): *Potentialbarriere*
Betrachen Sie ein Teilchen, welches aus $x = -\infty$ auf das Potential

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{U_0}{2} & 0 < x < x_0 \\ U_0 & x_0 \leq x \end{cases}$$

trifft ($U_0 > 0$).

1. Bestimmen Sie den Reflexionskoeffizienten R für die bei x_0 reflektierte Welle.

2. Wie sieht R für $\lim_{x_0->0}$ aus?