Vektorraum-Axiome

Eine Menge V von Elementen (Vektoren) $|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle \ldots \in V$ heißt komplexer Vektorraum, falls eine Addition $(+)$ undeine skalare Multiplikation mit $p, q \in \mathbb{C}$ erklärt sind, die folgende Axiome erfüllen:

(A1) $|\alpha\rangle + |\beta\rangle \in V$ Abgeschlossenheit

(A2) $|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\beta\rangle + |\alpha\rangle$ Kommutativität

(A3) $|\alpha\rangle + (|\beta\rangle + |\gamma\rangle) = (|\alpha\rangle + |\beta\rangle) + |\gamma\rangle$ Assoziativität

(A4) $|\alpha\rangle + |0\rangle = |\alpha\rangle$ neutrales Element („Nullvektor")

(A5) $|\alpha\rangle + (-|\alpha\rangle) = |0\rangle$ inverses Element

abelsche Gruppe

(M1) $p|\alpha\rangle \in V$ Abgeschlossenheit

(M2) $(pq)|\alpha\rangle = p(q|\alpha\rangle)$ Assoziativität

(M3) $(p+q)|\alpha\rangle = p|\alpha\rangle + q|\alpha\rangle$ Distributivität bzgl. Zahlen

(M4) $p(|\alpha\rangle + |\beta\rangle) = p|\alpha\rangle + p|\beta\rangle$ Distributivität bzgl. Vektoren

(M5) $1|\alpha\rangle = |\alpha\rangle$ neutrales Element

Eigenschaften des (hermiteschen) Skalarprodukts

$\langle\varphi|\psi\rangle$ ... Abbildung $V \times V \to \mathbb{C}$

(i) $\langle\varphi|\psi\rangle^* = \langle\psi|\varphi\rangle$

(ii) Sesquilinearität: $a, b \in \mathbb{C}$

$\langle\varphi|a\psi_1 + b\psi_2\rangle = a\langle\varphi|\psi_1\rangle + b\langle\varphi|\psi_2\rangle$ ... linear

$\langle a\varphi_1 + b\varphi_2|\psi\rangle = a^*\langle\varphi_1|\psi\rangle + b^*\langle\varphi_2|\psi\rangle$ ... semilinear

(iii) positiv definite Norm:

$\langle\psi|\psi\rangle > 0 \quad \forall |\psi\rangle \neq |0\rangle$

$\langle\psi|\psi\rangle = 0 \longrightarrow |\psi\rangle = |0\rangle$