Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. Engel
Dipl.-Phys. Dipl.-Math. Philipp Hövel
Dipl.-Phys. Jan Schlesner

30. April 2008

http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss08/pvhs/quant_a/

3. Übungsblatt zur Theoretischen Physik IIIa

Abgabe: Mittwoch 14.05.08 vor der Vorlesung

Unschärferelation

Aufgabe 6(6 Punkte):

1. Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ zwei beliebige Operatoren. Zeigen Sie, dass folgendes gilt

$$\langle [\hat{B}, \hat{A}] \rangle = \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle^*.$$

2. Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ zwei hermitesche Operatoren und sei $\hat{Q} = \Delta\hat{A} - i\lambda\Delta\hat{B}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Delta\hat{A} = \hat{A} - \langle\hat{A}\rangle$ und $\Delta\hat{B} = \hat{B} - \langle\hat{B}\rangle$. Beweisen Sie, dass $\hat{Q}^+\hat{Q}$ ein hermitescher Operator ist.

Aufgabe 7(14 Punkte): *Orts–Impuls–Unschärfe*
Zeigen Sie, dass das Produkt der Schwankungsquadrate von Ort und Impuls für ein Gaußsches Wellenpaket minimal wird.

Heinweise:

- Gehen Sie wie in der Vorlesung von $\langle \hat{Q}\psi | \hat{Q}\psi \rangle \geq 0$ mit $\hat{Q} = (\hat{x} - \langle\hat{x}\rangle) - i\lambda\,(\hat{p} - \langle\hat{p}\rangle)$, $\lambda \in R$ aus und forderen Sie die Gleichheit. (eindimensionaler Fall)
- Leiten Sie daraus eine Differentialgleichung für die Wellenfunktion $\psi(x)$ her.
- Lösen Sie diese Differentialgleichung.

Aufgabe 8(20 Punkte): *Berechnung von Erwartungswerten*

Wie wir in Aufgabe 7 gesehen haben, hat die Wellenfunktion

$$\psi(x) = e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} e^{ik_0 x} \qquad (\alpha > 0)$$

minimale Orts- und Impulsunschärfe. Rechnen Sie dieses nun explizit aus. Im Vergleich zu Aufgabe 7 gilt hier $\alpha = \frac{\hbar|\lambda|}{2}$ und $\langle x \rangle = 0$.

1. Normieren Sie die Wellenfunktion.
2. Berechnen Sie $\langle\hat{x}\rangle$, $\langle\hat{x}^2\rangle$, $\langle\hat{p}\rangle$ und $\langle\hat{p}^2\rangle$.
3. Bestimmen Sie Δx, Δp und das Unschärfeprodukt.