Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. Engel
Dipl.-Phys. Dipl.-Math. Philipp Hövel
Dipl.-Phys. Jan Schlesner

7. Mai 2008

http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss08/pvhs/quant_a/

# 4. Übungsblatt zur Theoretischen Physik IIIa

**Abgabe: Mittwoch 21.05.08** vor der Vorlesung

### Unitäre Operatoren und harmonischer Oszillator

**Aufgabe 9(6 Punkte):** *Unitäre Operatoren*

Sei $\hat{Q}$ ein linearer Operator. Beweisen Sie folgende Behauptungen:

1. Eigenwerte von unitären Operatoren können nur komplexe Zahlen vom Betrag $1$ sein.
2. $\left(\hat{Q}'\right)^{+} = \left(\hat{Q}^{+}\right)'$
3. Sei $f(\hat{Q})$ eine Funktion des Operators $\hat{Q}$. Dann gilt
$$f'(\hat{Q}) \quad = \quad f\left(\hat{Q}'\right).$$

**Aufgabe 10(14 Punkte):** *Harmonischer Oszillator in Matrixdarstellung*

Wir betrachten die Eigenzustände $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}^{+}\right)^{n}|0\rangle$ des Erzeugungsoperators $\hat{a}^{+}$ des harmonischen Oszillators in Matrixdarstellung. Die Eigenzustände lauten dann:

$$|0\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad |1\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad |2\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad \cdots$$

Berechnen Sie die Matrixdarstellung von Erzeugungsoperator $\hat{a}^{+}$, Vernichtungsoperator $\hat{a}$, Ortsoperator $\hat{x}$, Impulsoperator $\hat{p}$ und Hamiltonoperator $\hat{H}$ in dieser Basis.

**Aufgabe 11(20 Punkte):** *Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators*

Zeigen Sie ausgehend von

$$|n\rangle \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}^{\dagger}\right)^{n}|0\rangle,$$

dass die Eigenzustände des harmonischen Oszillators in Ortsdarstellung durch

$$\psi_n(q) \quad = \quad \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}H_n(q)e^{-\frac{q^2}{2}}$$

gegeben sind ($q = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$), wobei

$$H_n(q) \quad = \quad (-1)^n\, e^{q^2}\frac{d^n}{dq^n}e^{-q^2}$$

die Hermiteschen Polynome sind, die ihrerseits der linearen, homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\left(\frac{d^2}{dq^2} - 2q\frac{d}{dq} + 2n\right)H_n(q) \quad = \quad 0$$

genügen.
Skizzieren Sie die Wellenfunktionen des Grundzustandes und der ersten beiden angeregten Zustände.