Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. Engel
Dipl.-Phys. Dipl.-Math. Philipp Hövel
Dipl.-Phys. Jan Schlesner

30. Mai 2008

http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss08/pvhs/quant_a/

7. Übungsblatt zur Theoretischen Physik IIIa

Abgabe: Mittwoch 12.06.08 vor der Vorlesung

Drehimpulsoperatoren

Aufgabe 16(4 Punkte): *Drehimpulsalgebra*
Sei $\underline{\hat{J}}$ ein Vektoroperator mit $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = \sum_{k=1}^{3} i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{J}_k$. Berechnen Sie die Kommutatoren $[\hat{J}_+, \hat{J}_-]$, $[\underline{\hat{J}}^2, \hat{J}_\pm]$ und $[\hat{J}_z, \hat{J}_\pm]$, wobei $\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y$ und $\hat{J}_- = \hat{J}_x - i\hat{J}_y$ die in der Vorlesung eingeführten Leiteroperatoren bedeuten.

Aufgabe 17(16 Punkte): *Drehimpulsoperatoren*

Ein System befinde sich im gemeinsamen Eigenzustand $|lm\rangle$ der Bahndrehimpulsoperatoren $\hat{L}_z$ und $\underline{\hat{L}}^2$. Zeigen Sie, dass die kleinste Streuung für L_x und L_y erreicht wird, wenn $|m| = l$ gilt. Gehen Sie dabei wir folgt vor:

1. Beweisen Sie zunächst: $\langle lm|\hat{L}_i|lm\rangle = 0$ für $i = x, y$.
2. Berechnen Sie die Streuung $\langle lm| \left(\hat{L}_i - \langle\hat{L}_i\rangle\right)^2 |lm\rangle$ für $i = x, y, z$. Warum ist $\langle lm| \left(\hat{L}_z - \langle\hat{L}_z\rangle\right)^2 |lm\rangle = 0$?
3. Zeigen Sie nun, dass die kleinste Streuung für L_x und L_y erreicht wird, wenn $|m| = l$ ist.

Aufgabe 18(20 Punkte): *Ortsdarstellung des Bahndrehimpulsoperators in Kugelkoordinaten*
Zur Behandlung von Zentralpotenzialen ist es sinnvoll, Kugelkoordinaten zu verwenden:

$$\begin{aligned} x &= r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ y &= r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ z &= r\cos(\vartheta). \end{aligned}$$

1. Geben Sie die Abhängigkeit der Operatoren $\underline{\hat{L}}$, $\underline{\hat{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ von r, θ und φ an.
2. Beweisen Sie die Gültigkeit der Relation

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \Delta_{\vartheta\varphi}$$

mit

$$\Delta_{\vartheta\varphi} = -\frac{\underline{\hat{L}}^2}{r^2\hbar^2}$$

für den Laplace–Operator.

Hinweis: Verwenden Sie die aus dem Grundstudium bekannten Darstellungen für den Nabla–Operator $\underline{\nabla}$ und den Laplace–Operator Δ in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} &= \underline{e}_r\partial_r + \underline{e}_\vartheta\frac{1}{r}\partial_\vartheta + \underline{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi \\ \Delta\psi &= \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\psi\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\partial_\vartheta\left(\sin\vartheta\,\partial_\vartheta\psi\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\partial_\varphi^2\psi. \end{aligned}$$

Wie werden diese Relationen abgeleitet?