Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

27. April 2009

Prof. Dr. H.-H. v. Borzeszkowski, Dr. T. Chrobok, Dr. S. Heidenreich

2. Übungsblatt – Allgemeine Relativitätstheorie I

Abgabe: Di. 05.05.2009 14:00 Uhr

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe in Dreiergruppen ist erwünscht.

Aufgabe 1 (3 Punkte): *Eigenschaften von Tensoren unter Transformation*

Zeigen Sie unter Benutzung der Transformationsregel für Tensoren und der Definitionen des symmetrischen und antisymmetrischen Anteils eines Tensors $T_{\alpha\beta}$, dass der symmetrische Anteil und der antisymmetrische Anteil des transformierten Tensors $T'_{\alpha\beta}$ nur Funktionen des jeweiligen Anteils des nicht-transformierten Tensors $T_{\alpha\beta}$ sind.

Aufgabe 2 (4 Punkte): *Tensoralgebra*

Zeigen Sie, dass für einen Tensor $T_{\alpha\beta\gamma}$ 3. Stufe gilt:

(i) Wenn $T_{[\alpha\beta]\gamma} = 0$ und $T_{\alpha(\beta\gamma)} = 0$ gilt, dann ist $T_{\alpha\beta\gamma} = 0$.

(ii) Wenn $T_{[\alpha\beta]\gamma} = 0$, dann ist $T_{(\alpha\beta\gamma)} = \frac{1}{3}(T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta})$.

(iii) Wenn $T_{(\alpha\beta)\gamma} = 0$, dann ist $T_{[\alpha\beta\gamma]} = \frac{1}{3}(T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta})$.

Aufgabe 3 (5 Punkte): *Symmetrieeigenschaften von Tensoren*

a) Zeigen Sie, dass für einen Tensor 4. Stufe mit der Eigenschaft $T_{\alpha\beta\gamma\delta} = -T_{\beta\alpha\gamma\delta} \Longleftrightarrow T_{(\alpha\beta)\gamma\delta} = 0$, gilt:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta\gamma\delta} = T_{\gamma\delta\alpha\beta} - \frac{3}{2}\left(T_{[\beta\alpha\gamma]\delta} + T_{[\beta\delta\gamma]\alpha} + T_{[\delta\alpha\gamma]\beta} + T_{[\alpha\beta\delta]\gamma}\right) + \\ + T_{\gamma\beta(\delta\alpha)} + T_{\alpha\gamma(\delta\beta)} + T_{\beta\delta(\alpha\gamma)} + T_{\delta\alpha(\beta\gamma)} + T_{\delta\gamma(\beta\alpha)} + T_{\alpha\beta(\delta\gamma)}. \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass man zur Vereinfachung der ersten Klammer das Ergebnis aus Aufgabe 2 (iii) nutzen kann.
b) Es sei $K_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ein beliebiger Tensor 4. Stufe mit den Symmetrieeigenschaften $K_{(\alpha\beta)\gamma\delta} = 0$, $K_{\alpha\beta(\gamma\delta)} = 0$ und $K_{\alpha\beta\gamma\delta} = K_{\gamma\delta\alpha\beta}$. Wieviele unabhängige Komponenten besitzt dieser Tensor im zweidimensionalen Raum und wie lauten diese?

Bitte wenden $\longrightarrow$

Aufgabe 4 (3 Punkte): *Eigenzeit*

Zeigen Sie, dass das Differential der Eigenzeit $d\tau = \gamma^{-1} dt$ ein Lorentzskalar ist, d.h. $ds^2 = c^2 d\tau^2$.

Aufgabe 5 (5 Punkte): *Lorentztransformation*

Betrachten Sie zwei Inertialsysteme Σ und Σ', die sich gegeneinander mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung bewegen. Beim Übergang von einem zum anderen Bezugssystem bleibt die Minkowskimetrik $\eta^{\alpha\beta} = diag(1, -1, -1, -1)$ invariant. Leiten Sie aus der Invarianz der Metrik die spezielle Lorentztransformation her.
Hinweis:
Verwenden Sie $\tanh\varphi = \frac{v}{c}$.

Vorlesung:	• Donnerstag 16:15 Uhr – 17:45 Uhr im EW 229
Übung:	• Dienstag 14:15 Uhr – 15:45 Uhr im EW 246
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte.
Sprechzeiten:	• Prof. H.-H. v- Borzeszkowski: EW 740 n. V. • Dr. Thoralf Chrobok: n. V. im EW 740 • Dr. Sebastian Heidenreich: Mi, 13:00–14:00 Uhr im EW 702

Die Anmeldung muss bis zum 21.04.2009 22:59 Uhr unter
https://wwwitp.physik.tu-berlin.de/cgi-bin/lv/anmeldung.py?id=ss09_art1
erfolgen.