Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

5. Mai 2009

Prof. Dr. H.-H. v. Borzeszkowski, Dr. T. Chrobok, Dr. S. Heidenreich

3. Übungsblatt – Allgemeine Relativitätstheorie I

Abgabe: Di. 12.05.2009 14:00 Uhr

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe in Dreiergruppen ist erwünscht.

Aufgabe 1 (8 Punkte): *Maxwellsche Gleichungen in 4-er Schreibweise*

Zeigen Sie, dass die 4-er Schreibweise der Maxwellschen Gleichungen:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\beta \tag{1}$$

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\partial^\beta F^{\gamma\delta} = 0 \tag{2}$$

mit

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

und $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$ für Gleichung (1) den Maxwellschen Gleichungen

$$div\mathbf{E} = 4\pi\rho$$
$$rot\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\delta\mathbf{E}}{\delta t}$$

und für Gleichung (2)

$$div\mathbf{B} = 0$$
$$rot\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\delta\mathbf{B}}{\delta t}$$

entspricht. Dabei bezeichnet $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ das Levi-Civita-Symbol mit den Eigenschaften:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} 1 \text{ falls } \alpha\beta\gamma\delta \text{ gerade Permutation von } (0,1,2,3) \\ -1 \text{ falls } \alpha\beta\gamma\delta \text{ ungerade Permutation von } (0,1,2,3) \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} . \tag{3}$$

(b) Zeigen Sie, dass sich die Gleichungen (1,2) durch den Ansatz

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \tag{4}$$

und die Verwendung der Lorentzeichung $\partial_\alpha A^\alpha = 0$ in die Form

$$\Box A^\alpha = \frac{4\pi}{c} j^\alpha \tag{5}$$

überführen lassen. Hierbei ist $\Box T^\alpha = \partial_\lambda \partial^\lambda T^\alpha$.

Aufgabe 2 (8 Punkte): *Energie-Impuls-Bilanz eines idealen Fluids in der Speziellen Relativitätstheorie*
Der Energie-Impuls-Tensor eines idealen Fluids ist definiert durch

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + \frac{p}{c^2})u^\alpha u^\beta - p\eta^{\alpha\beta},$$

wobei ρ die Massendichte, p der Druck und u^α das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit ist (in der Vorlesung eingeführt).
(i) Leiten Sie die Energie-Impuls-Bilanz

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = (\dot\rho + \frac{\dot p}{c^2})u^\alpha + (\rho + \frac{p}{c^2})(\dot u^\alpha + \Theta u^\alpha) - p^{,\alpha} = 0$$

(kräftefreier Fall) für diesen Tensor ab. Darin bezeichnen $\dot a^\beta := a^\beta_{,\alpha} u^\alpha$ die Eigenzeitableitung und $\Theta := u^\alpha_{,\alpha}$ die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes.
(ii) Beweisen Sie, dass die Nullkomponente dieser Gleichung im nichtrelativistischen Grenzfall in die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \partial_i(\rho v^i) = 0 \tag{6}$$

übergeht. Vernachlässigen Sie dazu alle Terme $O(c^{-1})$ sowie $\dot u^\alpha$, benutzen Sie die Zerlegungen für $(u^\alpha) = \gamma(c, v^i)$ und beachten Sie, dass $\gamma \cong 1$ gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte): *Tensorrechnung*
Zeigen oder wiederlegen Sie die folgenden Behauptungen.

1. Haben zwei Tensoren $T_{\mu\nu}$ und $G^{\mu\nu}$ die Eigenschaften $T_{[\mu\nu]} = 0$ und $G^{(\mu\nu)} = 0$, dann gilt $G^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = 0$.
2. Sei $T^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ ein Tensor vierter Stufe. Wenn in einem Koordinatensystem $T^\alpha_{\beta\gamma\delta} = 3T^\alpha_{\delta\beta\gamma}$ gilt, dann in jedem beliebigen.

Vorlesung:	• Donnerstag 16:15 Uhr – 17:45 Uhr im EW 229
Übung:	• Dienstag 14:15 Uhr – 15:45 Uhr im EW 201
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte und aktive Teilnahme.
Sprechzeiten:	• Prof. H.-H. v- Borzeszkowski: EW 740 n. V. • Dr. Thoralf Chrobok: n. V. im EW 740 • Dr. Sebastian Heidenreich: Mi, 13:00–14:00 Uhr im EW 702

Die Anmeldung muss bis zum 21.04.2009 22:59 Uhr unter
https://wwwitp.physik.tu-berlin.de/cgi-bin/lv/anmeldung.py?id=ss09_art1
erfolgen.