Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

19. Mai 2009

Prof. Dr. H.-H. v. Borzeszkowski, Dr. T. Chrobok, Dr. S. Heidenreich

4. Übungsblatt – Allgemeine Relativitätstheorie I

Abgabe: 19.05.2009 14:00 Uhr

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe in Dreiergruppen ist erwünscht.

Aufgabe 1 (7 Punkte): *Christoffelsymbole*

Beim Übergang zu Nicht-Inertialsystemen treten zusätzlichen Trägheitskräfte auf, die durch Christoffelsymbole beschrieben werden können. Die Christoffelsymbole 2. Art sind gegeben durch

(1) $$\Gamma^{\tau}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\tau\lambda}(g_{\lambda\alpha,\beta} + g_{\beta\lambda,\alpha} - g_{\alpha\beta,\lambda}),$$

wobei durch $g_{\mu\nu}$ Trägheitspotentiale repräsentiert werden (siehe Vorlesung). Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage, indem Sie das Transformationsverhalten der Christoffelsymbole überprüfen: Christoffelsymbole transformieren sich wie Tensoren.

Aufgabe 2 (8 Punkte): *Rindler-Koordinaten*
Betrachten Sie die Koordinatentransformation

(2) $$x^0 = (x'^1 + \frac{1}{a}) \sinh(ax'^0) \quad x^1 = (x'^1 + \frac{1}{a}) \cosh(ax'^0) \quad x^2 = x'^2 \quad x^3 = x'^3$$

die den Übergang in ein Nichtinertialsystem im Minkowski Raum beschreibt (a ist eine Konstante).
a) Bestimmen Sie den metrischen Tensor

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} \eta_{\rho\kappa}$$

für die durch die Transformation (2) implizierten Koordinaten.
(b) Geben Sie den kontravarianten metrischen Tensor, welcher über $g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha$ definiert ist, an.
(c) Berechnen Sie alle Christoffelsymbole

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho}(g_{\beta\rho,\gamma} + g_{\rho\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\rho})$$

für diese Koordinaten. Nutzen Sie deren Symmetrie im unteren Indexpaar aus.
(d) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung (Geodätengleichung)

(3) $$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} = 0$$

in diesen Koordinaten die Form

$$\frac{d^2 x^0}{dt^2} + 2 \frac{a}{(1 + ax^1)} \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^0}{dt} = 0$$
$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + a(1 + ax^1) \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^0}{dt} \delta^i_1 = 0$$

annimmt.

Aufgabe 3 (5 Punkte): *Spärische Koordinaten*
Zeigen Sie zunächst, dass für eine diagonale Metrik die einzelnen Komponenten der Christoffelsymbole sich vereinfachen zu.

a) $\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \left(\frac{1}{2} \ln |g_{\alpha\alpha}|\right)$

b) $\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta} = -\frac{1}{2g_{\alpha\alpha}} g_{\beta\beta,\alpha}$ $(\alpha \neq \beta)$

c) Alle weiteren $\Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda}$ verschwinden.

Hierbei wird über doppelt auftretende Indizes nicht summiert. Bestimmen Sie nun die Christoffelsymbole für eine Euklidische Metrik in Kugelkoordinaten, dh. $g_{11} = 1$, $g_{22} = (x^1)^2$ und g_{33} $(x^1)^2 \sin(x^2)^2$. Zur Vereinfachung können Sie die Formeln $a) - c)$ verwendet werden.

Vorlesung:	• Donnerstag 16:15 Uhr – 17:45 Uhr im EW 229
Übung:	• Dienstag 14:15 Uhr – 15:45 Uhr im EW 201
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte und aktive Teilnahme.
Sprechzeiten:	• Prof. H.-H. v- Borzeszkowski: EW 740 n. V.
	• Dr. Thoralf Chrobok: n. V. im EW 740
	• Dr. Sebastian Heidenreich: Mi, 13:00–14:00 Uhr im EW 702

Die Anmeldung muss bis zum 21.04.2009 22:59 Uhr unter
https://wwwitp.physik.tu-berlin.de/cgi-bin/lv/anmeldung.py?id=ss09_art1
erfolgen.