Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

25. Mai 2009

Prof. Dr. H.-H. v. Borzeszkowski, Dr. T. Chrobok, Dr. S. Heidenreich

5. Übungsblatt – Allgemeine Relativitätstheorie I

Abgabe: Di 25.05.2009 14:00 Uhr

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe in Dreiergruppen ist erwünscht.

Aufgabe 1 (6 Punkte): *Rotierendes Bezugssystem*

Betrachten Sie die Koordinatentransformation

$$x^0 = x'^0 \quad x^1 = x'^1 \cos(x'^2 + \omega x'^0) \quad x^2 = x'^1 \sin(x'^2 + \omega x'^0) \tag{1}$$

die den Übergang in ein Nichtinertialsystem im Minkowski Raum beschreibt (ω ist eine Konstante und die Lichtgeschwindigkeit ist 1 gesetzt worden). Die dritte Raumkoordinate ist weggelassen worden.

a) Bestimmen Sie den metrischen Tensor

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu}\eta_{\rho\kappa}$$

für die durch die Transformation (1) implizierten Koordinaten, wobei gilt $\eta_{\rho\kappa} = diag(1, -1, -1)$.

(b) Geben Sie den kontravarianten metrischen Tensor, welcher über $g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$ definiert ist, an.

(c) Berechnen Sie alle Christoffelsymbole

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\rho}(g_{\beta\rho,\gamma} + g_{\rho\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\rho})$$

für diese Koordinaten. Nutzen Sie deren Symmetrie im unteren Indexpaar aus.

(d)Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung (Geodätengleichung)

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{dt}\frac{dx^\gamma}{dt} = 0 \tag{2}$$

in diesen Koordinaten und identifizieren Sie die Kräfte.

Aufgabe 2 (8 Punkte): *Virialsatz*
In der speziellen Relativitätstheorie erfüllt der Energie-Impulstensor $T^{\mu\nu}$ für ein abgeschlossenes System die folgende Virial-Bedingung

$$\int T^{km} d^3x = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\int T^{00} x^k x^m d^3x \tag{3}$$

Beweisen Sie diese Beziehung mit Hilfe von ${T^{\mu\nu}}_{,\nu} = 0$.

Aufgabe 3 (3 Punkte): *Konforme Transformation*
Betrachten Sie die Transformation der Metrik

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow \Omega(x^\mu) g_{\mu\nu}, \tag{4}$$

wobei $\Omega \neq 0$ eine beliebige Funktion ist. Zeigen Sie, dass eine solche Transformation winkelerhaltend ist und lichtartige Vektoren auf lichtartige Vektoren abgebildet werden.

Aufgabe 4 (3 Punkte): *Drehimpulstensor*
Der Drehimpulstensor bzgl. des Ereignises $\mathfrak{a}$ ist definiert als

$$J^{\alpha\beta\gamma} = (x^\alpha - a^\alpha)T^{\beta\gamma} - (x^\beta - a^\beta)T^{\alpha\gamma}. \tag{5}$$

$T^{\alpha\gamma}$ ist der Energie-Impulstensor und a^α die Koordinaten zum Ereignis $\mathfrak{a}$. Zeigen Sie, dass $J^{\alpha\beta\gamma}$ erhalten ist.

Vorlesung:	• Donnerstag 16:15 Uhr – 17:45 Uhr im EW 229
Übung:	• Dienstag 14:15 Uhr – 15:45 Uhr im EW 201
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte und aktive Teilnahme.
Sprechzeiten:	• Prof. H.-H. v- Borzeszkowski: EW 740 n. V. • Dr. Thoralf Chrobok: n. V. im EW 740 • Dr. Sebastian Heidenreich: Mi, 13:00–14:00 Uhr im EW 702

Die Anmeldung muss bis zum 21.04.2009 22:59 Uhr unter
https://wwwitp.physik.tu-berlin.de/cgi-bin/lv/anmeldung.py?id=ss09_art1
erfolgen.