Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik
9. Juni 2009
Prof. Dr. H.-H. v. Borzeszkowski, Dr. T. Chrobok, Dr. S. Heidenreich

8. Übungsblatt – Allgemeine Relativitätstheorie I

Abgabe: Di. 16.06.2009 14:00 Uhr

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe in Dreiergruppen ist erwünscht.

Aufgabe 1 (10 Punkte): *Die Symmetrien des Krümmungstensors*

Aus den Christoffelsymbolen und deren partiellen Ableitungen wird der Riemannsche Krümmungstensor definiert durch

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma,\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta,\gamma} + \Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\delta\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\delta}\Gamma^{\alpha}_{\gamma\sigma}. \tag{1}$$

a) Weisen Sie die Antisymmetrie im hinteren Indexpaar nach.
b) Zeigen Sie weiterhin, dass gilt

$$R^{\alpha}{}_{[\beta\gamma\delta]} = R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} + R^{\alpha}{}_{\delta\beta\gamma} + R^{\alpha}{}_{\gamma\delta\beta} = 0.$$

Benutzen Sie dabei die Symmetrie der Christoffelsymbole.
c) Zeigen Sie die Antisymmetrie im vorderen Indexpaar.
Hinweis: Der Beweis ist einfach wenn man die Definition des Krümmungstensors verwendet. Man zeigt dann, dass der symmetrische Teil verschwindet.
d) Wie viele unabhängige Komponenten hat der Riemansche Krümungstensor in n Dimensionen?
e) Wie sieht der Riemannschen Krümmungstensor in ein bzw. zwei Dimensionen aus. Drücken die den Krümmungstensor gegebenenfalls durch die Metrik und den Ricci-Skalar aus, wobei $R_{\alpha\beta} := R_{\gamma\alpha\delta\beta}g^{\gamma\delta}$ den Ricci-Tensor und $R := R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$ den Ricci-Skalar bezeichnet.

Aufgabe 2 (7 Punkte): *Flache Raumzeit*
Eine flache Raumzeit ist dadurch charakterisiert, dass eine Koordinatentransformation existiert, so dass $g_{\mu\nu}$ in $\eta_{\mu\nu}$ transformiert. Zeigen Sie, dass aus dem Verschwinden des Krümmungstensors für eine Raumzeit folgt, dass dies flach ist. Hinweis:
Transportieren Sie geeignete Vektoren parallel.

Aufgabe 3 (3 Punkte): *Kovariante Ableitung*
Zeigen Sie, das die zweite kovariante Ableitung eines Skalarfeldes kommutiert, d.h.

$$S_{;\alpha\beta} = S_{;\beta\alpha} \tag{2}$$

Vorlesung:	• Donnerstag 16:15 Uhr – 17:45 Uhr im EW 229
Übung:	• Dienstag 14:15 Uhr – 15:45 Uhr im EW 201
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte und aktive Teilnahme.
Sprechzeiten:	• Prof. H.-H. v- Borzeszkowski: EW 740 n. V.
	• Dr. Thoralf Chrobok: n. V. im EW 740
	• Dr. Sebastian Heidenreich: Mo, 13:45–14:45 Uhr im EW 702

Die Anmeldung muss bis zum 21.04.2009 22:59 Uhr unter
https://wwwitp.physik.tu-berlin.de/cgi-bin/lv/anmeldung.py?id=ss09_art1
erfolgen.