Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. Tobias Brandes,
Dr. Vasily Zaburdaev, Dipl.-Phys. Valentin Flunkert, Dipl.-Phys. Johannes Taktikos
Miriam Wegert, Malte Langhoff

14. April 2009

1. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik 2009

Abgabe: Mo. 27.04.2009 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben, der Zettel wird sonst nicht korrigiert!
Abgabe bitte in 3er (oder 2er) Gruppen – keine Einzelabgabe.

Aufgabe 1 (10 Punkte): *Fouriertransformation*

Die Fouriertransformierte einer Funktion $f(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, f(x) \, e^{-ikx} \, .$$

Berechnen und skizzieren Sie die Fouriertransformierten der nachfolgenden Funktionen:

1. $f(x) = e^{-\alpha|x|}, \; \alpha > 0$
2. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta} \, , & \text{für } x \in [x_0 - \Delta, x_0 + \Delta] \\ 0 \, , & \text{sonst} \end{cases}$
3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
   (Gaußverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2)

Diskutieren Sie kurz den Zusammenhang zwischen der Gaußfunktion und ihrer Fouriertransformierten und vergleichen Sie die entsprechenden Halbwertsbreiten.

Aufgabe 2 (10 Punkte): *Wave packet*
At time $t = 0$, a state of a free particle is described by the following wave function in $d = 1$ dimension (here $\hbar = 1$):

$$\Psi(x, t = 0) = N \exp\left\{ -\frac{x^2}{2a^2} + ip_0 x \right\} ,$$

where N is a normalization factor.

1. Calculate the normalization factor N.
2. To find the time evolution of this state, i.e., $\Psi(x, t \geq 0)$, solve the corresponding Schrödinger equation by applying the Fourier transform (see exercise 1):

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x,t)$$

3. Find the following averages:

$$\overline{x(t)} \qquad \text{and} \qquad \overline{(\triangle x(t))^2} \equiv \overline{(x - \overline{x(t)})^2}.$$

4. Prove that the width of the wave packet, $\overline{(\triangle x(t))^2}$, cannot be arbitrarily small.

Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. Tobias Brandes,
Dr. Vasily Zaburdaev, Dipl.-Phys. Valentin Flunkert, Dipl.-Phys. Johannes Taktikos
Miriam Wegert, Malte Langhoff 14. April 2009

Aufgabe 3 (10 Punkte): *δ-Funktion*

1. Zeigen Sie durch Substitution
$$\delta(\alpha x) = \frac{\delta(x)}{|\alpha|}.$$

2. Zeigen Sie nun, dass für eine Funktion $g(x)$ mit einfachen Nullstellen x_i $(i = 1, \ldots, n)$ gilt
$$\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|}. \qquad (\diamondsuit)$$
Zerlegen Sie dazu das Integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(g(x))\, f(x)\, dx$$
in Intervalle $[a_i, a_{i+1})$, in denen jeweils nur ein x_i liegt, und entwickeln Sie $g(x)$ bis zur ersten Ordnung um das jeweilige x_i.

Bonus: Berechnen Sie analog zum Abschnitt 1.6.2 im Skript die Zustandsdichte $\rho(\omega)$ für nicht relativistische Teilchen mit Masse m in $d = 3$ Dimensionen. Für diese Teilchen gilt die Dispersionsrelation
$$\omega(\vec{k}) = \frac{\hbar |\vec{k}|^2}{2m}.$$
Berechnen Sie dazu die Zustandssumme als Integral in Kugelkoordinaten und verwenden Sie $(\diamondsuit)$.

Vorlesung:
- Dienstag 8:00 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203
- Mittwoch 8:00 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202

Scheinkriterien:
- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Bestandene Klausur.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.

Achtung: Bitte Online bis zum 18.4.09 20:00 Uhr anmelden. Siehe Link auf Homepage:
http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss09/pvbs/quant/
Klausur: ...