Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. Tobias Brandes,
Dr. Vasily Zaburdaev, Dipl.-Phys. Valentin Flunkert, Dipl.-Phys. Johannes Taktikos
Miriam Wegert, Malte Langhoff

23. Juni 2009

11. Übungsblatt (Bonus) – Theoretische Physik II: Quantenmechanik 2009

Abgabe: Mo. 06.07.2009 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben, der Zettel wird sonst nicht korrigiert!
Abgabe bitte in 3er (oder 2er) Gruppen – keine Einzelabgabe.

Aufgabe 29 (10 Punkte): *Zeitentwicklung in der Quantenmechanik*

Gegeben seien ein nicht explizit zeitabhängiger Hamiltonoperator H und eine Observable F, beide mit vollständig diskreten Spektren und nicht-entarteten Eigenzuständen

$$H\Psi_n = E_n\Psi_n\,; \qquad F\phi_m = f_m\phi_m.$$

Zur Zeit $t < 0$ befinde sich ein Teilchen im Zustand Ψ_k. Wie verläuft die Zeitentwicklung des Zustands für $t > 0$, falls

(a) keine Messung der Observablen stattfindet?

(b) zur Zeit $t = 0$ die Messung von F den Wert f_m ergeben hat?

Aufgabe 30 (10 Punkte): *Potentialstreuung*
Eine freie Teilchenwelle Ae^{ikx} laufe von $x = -\infty$ kommend gegen das Potential

$$V(x) = \begin{cases} \frac{\hbar^2}{2m}v_0\delta(x+x_0) & \text{für } x \le 0; \qquad x_0 > 0, \qquad v_0 > 0 \\ +\infty & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

(a) Formulieren Sie passende Lösungsansätze für die Wellenfunktion $\psi(x)$ in den Bereichen I: $x < -x_0$ und II: $-x_0 < x \le 0$ und geben Sie die Anschlussbedingungen bei $x = 0$ und $x = -x_0$ an.

(b) Bestimmen Sie den Reflexionskoeffizienten im Bereich I. Geben Sie k-Werte an, bei denen der Transmissionskoeffizient eins wird, also die δ-Barriere vollständig durchlässig wird.

Aufgabe 31 (10 Punkte): *Spin-1/2-Teilchen*
Wir betrachten ein Spin-1/2-Teilchen, das sich im Zustand

$$\hat{\Psi}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \Psi_+(\vec{x}) \\ \Psi_-(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

befindet, wobei

$$\Psi_+(\vec{x}) = R(r)\left[Y_{00}(\theta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_{10}(\theta,\varphi)\right], \quad \Psi_-(\vec{x}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left[Y_{11}(\theta,\varphi) - Y_{10}(\theta,\varphi)\right].$$

(a) $\hat{\Psi}(\vec{x})$ soll auf eins normiert sein. Welche Bedingung muss die Radialfunktion $R(r)$ dann erfüllen?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Messung von S_z den Wert $\pm\hbar/2$ in diesem Zustand ergeben? Beantworten Sie die entsprechenden Fragen für S_x und L_z.

(c) Die Messung von $\vec{L}^2$ in diesem Zustand ergebe den Wert null. In welchem Zustand befindet sich das Teilchen unmittelbar nach dieser Messung?

Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. Tobias Brandes,
Dr. Vasily Zaburdaev, Dipl.-Phys. Valentin Flunkert, Dipl.-Phys. Johannes Taktikos
Miriam Wegert, Malte Langhoff

23. Juni 2009

Hinweis:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 32 (10 Punkte): *Perturbation theory*
Calculate the eigenvalues of the unharmonic oscillator in one dimension

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \alpha x^3 + \beta x^4,$$

by using perturbation theory in α and β. Note that for the term with α the second order corrections should be taken into account.

Aufgabe 33 (10 Punkte): *Teilchen auf Kugeloberfläche*
Ein Teilchen der Masse M bewege sich auf einer Kugeloberfläche mit Radius R.

(a) Geben Sie den Hamiltonoperator H_0 an und lösen Sie die stationäre Schrödinger-Gleichung für dieses Problem. Welche Entartung liegt vor?

(b) Als Störung wirke ein homogenes Schwerefeld in z-Richtung. Finden Sie eine Observable, die sowohl mit dem zusätzlichen Hamiltonoperator H_1 als auch mit H_0 kommutiert.

(c) Berechnen Sie die Energieverschiebung in erster Ordnung Störungstheorie. Wird die Entartung aufgehoben?

Nützliche Formeln:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\vec{L}^2}{r^2 \hbar^2},$$

$$\cos\theta \, Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{(2l+3)(2l+1)}} Y_{l+1,m}(\theta, \varphi) + \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{(2l+1)(2l-1)}} Y_{l-1,m}(\theta, \varphi).$$

Klausurtermin:	• Dienstag, 07.07.2009, 8:00–10:00 Uhr, Hörsaal H0104
Sprechstunden:	• Prof. Dr. Tobias Brandes: Mo 13:00 Uhr (EW 742) • Dr. Vasily Zaburdaev: Di 10:00 Uhr (EW 708) • Dipl. Phys. Valentin Flunkert: Fr 10:00 Uhr (EW 632) • Dipl. Phys. Johannes Taktikos: Mi 16:00 Uhr (EW 701) • Malte Langhoff: Do 13:00 Uhr (EW217) • Miriam Wegert: Do 14:00 Uhr (EW217)