Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. Tobias Brandes,
Dr. Vasily Zaburdaev, Dipl.-Phys. Valentin Flunkert, Dipl.-Phys. Johannes Taktikos
Miriam Wegert, Malte Langhoff

28. April 2009

3. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik 2009

Abgabe: Mo. 11.05.2009 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben, der Zettel wird sonst nicht korrigiert!
Abgabe bitte in 3er (oder 2er) Gruppen – keine Einzelabgabe.

Aufgabe 7 (10 Punkte): *Eindimensionales Kastenpotential*

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Funktionen

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_n x) \quad \text{mit} \quad k_n = \frac{\pi n}{L}$$

Lösungen der stationären Schrödingergleichung im eindimensionalen Kastenpotential mit unendlich hohen Wänden sind.

1. Der Zustand $|\phi\rangle$ sei durch die Wellenfunktion

   $$\phi(x) = N\, x(L - x)$$

   gegeben. Bestimmen Sie die Konstante N so, dass der Zustand normiert ist.

2. Beweisen Sie nun die Formel

   $$\frac{\pi^3}{32} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \, .$$

   Tipp: Entwickeln Sie den Zustand $|\phi\rangle$ nach den Eigenfunktionen $|\psi_n\rangle$ und werten Sie die Gleichung bei $x = L/2$ aus. Lösen Sie die auftretenden Integrale durch Substitution (auf die Grenzen achten).

3. Betrachten Sie die Zeitentwicklung des Anfangzustands $\psi(x, t = 0) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x)$. Wie lautet $\psi(x, t)$? Berechnen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x, t)|^2$ und plotten Sie diese für $c_1 = c_2 = 1/\sqrt{2}$, $\hbar = 1$ und $L = 1$ für ca. 10 verschiedene t-Werte zwischen 0 und 0.43. (Sie können auch eine Animation per email einreichen).

Bonus: Berechnen Sie auch die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j(x, t)$ und zeichnen Sie diese mit in die Plots/Animation ein.

Aufgabe 8 (10 Punkte): *Cauchy-Folgen*

Der Vektorraum $C([a, b])$ der komplexwertigen, auf dem reellen Intervall $[a, b]$ definierten stetigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, $x \to f(x)$ mit der 'Quadrat-Norm' $\|\psi\|_2 \equiv \sqrt{\int_a^b dx |f(x)|^2}$ ist *kein* Banachraum, d.h. *nicht* vollständig, denn es gibt Cauchy-Folgen, die gegen unstetige Funktionen $f \notin \mathbf{C}([a, b])$ konvergieren. Konstruieren Sie ein solches Beispiel.

Prof. Dr. Tobias Brandes,
Dr. Vasily Zaburdaev, Dipl.-Phys. Valentin Flunkert, Dipl.-Phys. Johannes Taktikos
Miriam Wegert, Malte Langhoff

28. April 2009

Aufgabe 9 (10 Punkte): *Vollständigkeit des Hilbertraums* $l^2(\mathbb{C})$

Als natürliche Verallgemeinerung des $\mathbb{C}^n$ betrachten wir den Vektorraum

$$l^2(\mathbb{C}) := \left\{ z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} = \mathbb{C}^{\infty}, \quad z = (z_1, \ldots, z_n, \ldots), \quad z_i \in \mathbb{C} \quad \middle| \quad \sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2 < \infty \right\}.$$

Für Elemente $x,\ y \in l^2(\mathbb{C})$ definieren wir ein Skalarprodukt gemäß

$$(x,\, y) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i^* \, y_i.$$

Zeigen Sie nun, dass der Prä-Hilbertraum

$$\big(l^2(\mathbb{C}),\ (\cdot,\, \cdot)\big)$$

vollständig ist, d.h. er ist ein Hilbertraum.

Hinweis: Jedem Element x eines Prä-Hilbertraums lässt sich mit Hilfe des Skalarproduktes eine Norm $||x|| := \sqrt{(x,x)}$ zuordnen. Zum Beweis der Vollständigkeit von $l^2(\mathbb{C})$ muss gezeigt werden, dass jede Cauchy-Folge $\big(x^{(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ in $l^2(\mathbb{C})$ für $n \to \infty$ gegen ein $x \in l^2(\mathbb{C})$ konvergiert.

Sprechstunden:

- Prof. Dr. Tobias Brandes: Mo 13:00 Uhr (EW 742)
- Dr. Vasily Zaburdaev: Mi 11:00 Uhr (EW 708)
- Dipl. Phys. Valentin Flunkert: Di 13:00 Uhr (EW 632)
- Dipl. Phys. Johannes Taktikos: Mi 11:00 Uhr (EW 701)
- Malte Langhoff: Do 13:00 Uhr (EW217)
- Miriam Wegert: Do 14:00 Uhr (EW217)