Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. Tobias Brandes,
Dr. Vasily Zaburdaev, Dipl.-Phys. Valentin Flunkert, Dipl.-Phys. Johannes Taktikos
Miriam Wegert, Malte Langhoff

5. Mai 2009

4. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik 2009

Abgabe: Mo. 18.05.2009 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben, der Zettel wird sonst nicht korrigiert!
Abgabe bitte in 3er (oder 2er) Gruppen – keine Einzelabgabe.

Aufgabe 10 (15 Punkte): *Diskrete Schrödingergleichung*

Betrachten Sie die diskrete Version der Schrödingergleichung in einer Dimension, Skript Kap 2.3.1, Gl. (2.114).

1. Bestimmen Sie die normierten Eigenvektoren $|\alpha\rangle$ und die zugehörigen Eigenwerte E_α der Matrix H für den Fall von nur zwei Stützstellen $i = 0$ und $i = 1$. Nehmen Sie hierzu für H an, dass $\varepsilon_i = 0$.

2. Führen Sie die Rechnung numerisch aus (Mathematica), z.B. für $n = 5$. Stellen Sie das 'Spektrum' der Eigenwerte E_α für $n = 100$ graphisch dar. Setzen Sie $T = 1$ in der Matrix des Hamiltonians H. Nehmen Sie wieder $\varepsilon_i = 0$ an.

3. Zeigen Sie, dass sich die Matrix H in Dirac-Notation als

$$H = T \sum_{l=0}^{n-1} \left(|l\rangle\langle l+1| + |l+1\rangle\langle l|\right) + T\left(|0\rangle\langle n| + |n\rangle\langle 0|\right)$$

   schreiben lässt (periodische Randbedingungen).

4. Machen Sie für die Eigenvektoren $|\alpha\rangle$ den Ansatz $|\alpha\rangle = \sum_{l=0}^{n} e^{i\alpha l}|l\rangle$ mit den Basis-Kets $|l\rangle$ und bestimmen Sie damit die möglichen Werte für α und E_α.

Aufgabe 11 (15 Punkte): *Harmonischer Oszillator*

Die Hermite-Polynome $H_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$, lassen sich durch eine *erzeugende Funktion*

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, t^n, \quad -\infty < x,\, t < \infty$$

definieren.

1. Zeigen Sie hiermit die Formel

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\, e^{-x^2}.$$

2. Bestimmen Sie den Normierungsfaktor N_n der Eigenzustände

$$\psi_n(x) \equiv N_n H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

   des harmonischen Oszillators (wir haben $\frac{m\omega}{\hbar} = 1$ gesetzt). Benutzen Sie dafür das folgende Kurvenintegral in der komplexen Ebene,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z^n} = \delta_{n,1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

wobei die Kurve C um den Ursprung läuft, und leiten Sie damit zunächst die Darstellung

$$H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C dz\, \frac{e^{2zx-z^2}}{z^{n+1}}$$

her. Zeigen Sie damit, dass die Funktionen $\psi_n(x)$ orthogonal sind und dass für den Normierungsfaktor gilt:

$$N_n = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} n! 2^n}}.$$

Bonus: Beweisen die Vollständigkeit der $\psi_n(x)$. Nehmen Sie hierfür an, dass es eine Wellenfunktion $\phi(x)$ gibt mit $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \phi(x) = 0$ für alle n. Definieren Sie anschließend die Fouriertransformierte

$$\tilde{F}(z) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-\frac{x^2}{2}} e^{izx} \phi(x).$$