Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. Tobias Brandes,
Dr. Vasily Zaburdaev, Dipl.-Phys. Valentin Flunkert, Dipl.-Phys. Johannes Taktikos
Miriam Wegert, Malte Langhoff

2. Juni 2009

8. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik 2009

Abgabe: Mo. 15.06.2009 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben, der Zettel wird sonst nicht korrigiert!
Abgabe bitte in 3er (oder 2er) Gruppen – keine Einzelabgabe.

Aufgabe 20 (10 Punkte): *Zweiniveausystem*

Der Hamiltonian eines Zweiniveausystems ist gegeben durch

$$H = \begin{pmatrix} \varepsilon/2 & T_c \\ T_c & -\varepsilon/2 \end{pmatrix}.$$

1. Interpretieren Sie die zwei Parameter ε, T_c im Hamiltonian des Zweiniveausystems. Schreiben Sie hierzu die Pauli-Matrizen in Bra-Ket-Notation mit den Basis-Kets $|L\rangle$ ('links') und $|R\rangle$ ('rechts').

2. Betrachten Sie den Spezialfall $\varepsilon = 0$. Berechnen Sie den Zeitentwicklungsoperator $U(t)$ mittels *Diagonalisierung* des Hamiltonians und mittels der *Exponentialreihe*.

3. Berechnen Sie für $\varepsilon = 0$ die Wahrscheinlichkeiten $w_L(t)$, $w_R(t)$ mit Anfangszuständen $|\Psi(t=0)\rangle = |L\rangle$, $|\Psi(t=0)\rangle = |R\rangle$, und $|\Psi(t=0)\rangle = |GZ\rangle$, wobei $|GZ\rangle$ der Grundzustand des Hamiltonians ist.

Bonus: Zeigen Sie, dass die Frequenz der quantenmechanischen Oszillationen nur von der Energiedifferenz der zwei Eigenzustände des Hamiltonians $\hat{H}$ abhängt (ε, T_c beliebig).

Aufgabe 21 (10 Punkte): *Bewegungsgleichungen im Heisenberg-Bild*
Im Schrödinger-Bild sei ein Einteilchen-Hamiltonian in $d = 1$ Dimension gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}).$$

1. Zeigen Sie zunächst, dass für die fundamentalen Vertauschungsrelationen im Heisenberg-Bild $[\hat{x}(t), \hat{p}(t)] = i\hbar$ und $[\hat{x}(t), \hat{x}(t)] = [\hat{p}(t), \hat{p}(t)] = 0$ gilt.

2. Stellen Sie die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen für Orts- und Impulsoperator auf.

3. Leiten Sie aus der Heisenberg-Bewegungsgleichung einen allgemeinen Ausdruck für die Zeitentwicklung von Erwartungswerten einer Observablen her und geben Sie insbesondere die entsprechenden Gleichungen für die Erwartungswerte von Ort und Impuls an (*Ehrenfest-Gleichungen*). Vergleichen Sie diese Differentialgleichungen mit den Hamiltonschen Gleichungen der klassischen Mechanik.

Bonus: Betrachten Sie das Potential $V(\hat{x}) = \frac{m}{2}\omega^2\hat{x}^2$ und geben Sie die Differentialgleichung für $\hat{x}(t)$ an. Berechnen Sie mit Hilfe der Lösung den Kommutator $[\hat{x}(t_1), \hat{x}(t_2)]$.

Aufgabe 22 (10 Punkte): *Verschobener harmonischer Oszillator*

Wir betrachten den harmonischen Oszillator H und den verschobenen harmonischen Oszillator H_λ (Gleichung (2.180) im Skript zur Vorlesung). Dabei sei $X_\lambda = e^{\lambda(a-a^\dagger)}$ der unitäre Verschiebe-Operator.

Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. Tobias Brandes,
Dr. Vasily Zaburdaev, Dipl.-Phys. Valentin Flunkert, Dipl.-Phys. Johannes Taktikos
Miriam Wegert, Malte Langhoff

2. Juni 2009

1. Zeigen Sie, dass die verschobenen und unverschobenen Eigenzustände zusammenhängen gemäß:
$$|n\rangle_\lambda = X_\lambda |n\rangle.$$
   (a) Zeigen Sie dazu, dass X_λ dem räumlichen Translationsoperator $U_{\lambda x_0} = \exp\left(-\frac{i\lambda x_0 \cdot p}{\hbar}\right)$ entspricht (Definitionen aus dem Skript) und somit Wellenfunktionen $U_{x_0\lambda}\psi(x) = \psi(x - x_0\lambda)$ verschiebt.
   (b) Zeigen Sie weiterhin, dass U auch den Hamiltonoperator mit $U_{x_0\lambda} H U^\dagger_{x_0\lambda}$ räumlich verschiebt.
2. Beweisen Sie $a + \lambda = X_\lambda a X^\dagger_\lambda$ mit Hilfe des Ergebnisses der Bonusaufgabe.
3. Zeigen Sie, dass die Eigenwertgleichung für den unverschobenen Oszillator $H|n\rangle = E_n|n\rangle$ sich in die Eigenwertgleichung des verschobenen Oszillators $H_\lambda|n\rangle_\lambda = E_n|n\rangle_\lambda$ mit Hilfe von X_λ transformieren läßt.

Bonus: Zeigen Sie die *nested commutator expansion*:
$$e^S O e^{-S} = O + [S, O] + \frac{1}{2!}[S, [S, O]] + \frac{1}{3!}[S, [S, [S, O]]] + \dots.$$
Tipp: Leiten Sie eine DGL erster Ordnung für $f(x) = e^{xS} O e^{-xS}$ her und führen Sie eine Taylorentwicklung in x durch oder verwenden Sie vollständige Induktion.