Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD,
Dipl. Phys., Dipl. Math. Philipp Hövel, Dipl. Phys. Stefan Fruhner,
Dipl. Phys. Peter A. Kolski, Cand. Phys. Martin Kliesch

14. Mai 2009

5. Übungsblatt – Theoretische Physik IV: Thermodynamik und Statistik 2009

Abgabe: Di. 26.05.2009 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude oder online über ISIS

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 11 (10 Punkte): *Fermionen und Bosonen*

Wir betrachten ein quantenmechanisches System wechselwirkungsfreier Teilchen mit dem Ein-Teilchen-Energieniveau E_0. Ein Mikrozustand wird durch die Besetzungszahl n charakterisiert. Es gilt $n \in \{0, 1\}$ für Fermionen und $n \in \{0, 1, 2 \ldots\}$ für Bosonen.

1. Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme für Fermionen und Bosonen.
2. Wie lauten jeweils die mittleren Teilchenzahlen $\langle n \rangle$?

Alternativ kann man das System auch als eine Verteilung auf einem Fock-Raum (Summe von N-Teilchen-Hilbert-Räumen) auffassen. Das heißt: Das System habe die Ein-Teilchen-Energieniveaus $E_i \, (i = 1, \ldots, \infty)$, die jeweils mit n_i Fermionen oder Bosonen besetzt werden. Ein Fock-Zustand ist dann beschrieben durch $|n_1, \ldots, n_i, \ldots\rangle$.

3. Wie lautet auf diesem Raum der Hamilton-Operator?
4. Berechnen Sie in diesem Formalismus den Erwartungswert des Teilchenzahloperators $\langle \hat{N} \rangle = \mathrm{tr}\left(\hat{\rho}\hat{N}\right)$.
5. Zeichnen Sie die Besetzungswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Energie für beide Teilchensorten.
6. Berechnen Sie die Shannon-Information I.

Aufgabe 12 (10 Punkte): *Statistischer Operator gemischter Zustände*
Im Folgenden sei $\hat{\rho}$ ein statistischer Operator $\hat{\rho} = \sum_\alpha P_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|$ eines gemischten Zustands.

1. Leiten Sie zunächst aus der Schrödinger-Gleichung mit dem Hamilton-Operator $\hat{H}$ folgende Gleichung (*von-Neumann-Gleichung*) her:
$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{\rho}\right].$$

Zeigen Sie nun folgende Eigenschaften:

2. $\langle \hat{A} \rangle = \mathrm{tr}\left(\hat{\rho}\hat{A}\right)$
3. $\mathrm{tr}\left(\hat{\rho}\right) = 1$
4. $\hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho}$ und $\mathrm{tr}\left(\hat{\rho}^2\right) < 1$, falls $P_\alpha \neq 0$ ist für mehr als ein α
5. $\hat{\rho}^+ = \hat{\rho}$
6. Es seien die Operatoren $\hat{\rho}_\nu$ Dichtematrizen, die folglich die Bedingungen aus Aufgaben (12.2)-(12.5) erfüllen, und $P_\nu \geq 0$, $\sum_\nu P_\nu = 1$. Zeigen Sie, dass $\sum_\nu P_\nu \hat{\rho}_\nu$ ebenfalls diese Bedingungen erfüllt.