Zusammenfassung der 2. Vorlesung (27.04.09)

1. Klassische Information und Quanteninformation (Fortsetzung)

1.3.1 *Effekte* : Ein lineares Funktional L auf dem Zustandsraum $\mathcal{V}$ ist genau dann normstetig, wenn es beschränkt ist, also für alle $x \in \mathcal{V}$, gilt $|L(x)| \leq \alpha\|x\|$ mit $0 \leq \alpha < \infty$. Sei $\mathcal{V}'$ der Raum der beschänkten reellen linearen Funktionale von $\mathcal{V}$. Man zeigt leicht, dass

$$\|L\| := \sup_{x\in\mathcal{V}} \frac{L(x)}{\|x\|}$$

die Eigenschaften einer Norm auf $\mathcal{V}'$ hat. Für eine Cauchy-Folge $\{L_n\}$ ist für alle $x \in \mathcal{V}$ wegen $|l_n(x) - L_m(x)| \leq \|x\|\|L_n - L_m\|$ auch $\{Ł_n(x)\}$ eine Cauchy-Folge und da $\mathbf{R}$ vollständig ist folgt leicht die Vollständigheit von $\mathcal{V}'$. Mit Hilfe des Hahn-Banachschen Trennungssatzes kann man ferner zeigen, dass die Basisnorm in $\mathcal{V}$

$$\|x\| = \sup_{L\in\mathcal{V}'} \frac{L(x)}{\|L\|}$$

erfüllt. Die Normen des Dualpaares der Banachräume stehen also in einer bemerkenswert symmetrischen Beziehung zueinander. Schließlich kann man noch die Bilinearform

$$\mathcal{V}' \times \mathcal{V} \ni (l, x) \longmapsto < L, x >:= L(x)$$

betrachten, die die Ungleichung $| < L, x > | \leq \|L\|\|x\|$ erfüllt, und die sogenannten schwachen Topologien einführen.

Im letzten Abschnitt haben wir im Mischumgsaxiom die Effekte $e \in \mathcal{E}$ durch affine Funktionale $E : \mathcal{Z} \to [0, 1]; z \mapsto p_{(e,z)}(0)$ dargestellt und den Kegel $\mathcal{C} := \{c|c = \alpha z, 0 \leq \alpha \in \mathbf{R}, z \in \mathcal{Z}\}$ eingeführt. Für $x \in \mathcal{C} - \mathcal{C}$, etwa $x = \alpha_1 z_1 - \alpha_2 z_2$, ist $L_e(x) = \alpha_1 E(z_1) - \alpha_2 E(z_2)$ wohldefiniert. Um dies zu zeigen sei $\alpha_1 z_1 - \alpha_2 z_2 = \alpha_1' z_1' - \alpha_2' z_2'$, dann folgt $\alpha_1 z_1 + \alpha_2' z_2' = \alpha_1' z_1' + \alpha_2 z_2 \in \mathcal{C}$ und weiter

$$(\alpha_1 + \alpha_2') \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2'} z_1 + \frac{\alpha_2'}{\alpha_1 + \alpha_2'} z_2' \right) = (\alpha_1' + \alpha_2) \left(\frac{\alpha_1'}{\alpha_1' + \alpha_2} z_1' + \frac{\alpha_2}{\alpha_1' + \alpha_2} z_2 \right).$$

Sei nun $\alpha > 0$, $\alpha' > 0$, $\alpha \neq \alpha'$, $z, z' \in \mathcal{Z}$, $z \neq z'$, dann gelten $\alpha z \neq \alpha z'$ und $\alpha z \neq \alpha' z$. Im nichttrivialen Fall folgt damit aus der letzten Gleichung

$$(\alpha_1 + \alpha_2') = (\alpha_1' + \alpha_2)$$

und

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2'} z_1 + \frac{\alpha_2'}{\alpha_1 + \alpha_2'} z_2' = \frac{\alpha_1'}{\alpha_1' + \alpha_2} z_1' + \frac{\alpha_2}{\alpha_1' + \alpha_2} z_2.$$

Die zweite Gleichung liefert

$$E\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2'} z_1 + \frac{\alpha_2'}{\alpha_1 + \alpha_2'} z_2'\right) = E\left(\frac{\alpha_1'}{\alpha_1' + \alpha_2} z_1' + \frac{\alpha_2}{\alpha_1' + \alpha_2} z_2\right)$$

und, da E ein affines Funktional auf $\mathcal{Z}$ ist, folgt

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2'} E(z_1) + \frac{\alpha_2'}{\alpha_1 + \alpha_2'} E(z_2') = \frac{\alpha_1'}{\alpha_1' + \alpha_2} E(z_1') + \frac{\alpha_2}{\alpha_1' + \alpha_2} E(z_2).$$

Weil die Nenner nach der ersten Gleichung übereistimmen, ist

$$\alpha_1 E(z_1) + \alpha_2' E(z_2') = \alpha_1' E(z_1') + \alpha_2 E(z_2),$$

und schließlich

$$L_e(x) = \alpha_1 E(z_1) - \alpha_2 E(z_2) = \alpha_1' E(z_1') - \alpha_2' E(z_2').$$

Als beschränktes lineares Funktional auf $\mathcal{C} - \mathcal{C}$ kann L_e auf die Normvervollständigung $\mathcal{V} = \overline{\mathcal{C} - \mathcal{C}}$ eindeutig fortgesetzt werden. Damit treten die Effekte als Elemente des Banach Dualraums $\mathcal{V}'$ der stetigen Funktionale des Zustandsraumes $\mathcal{V}$ auf und es gilt für $z \in \mathcal{Z}$, $e \in \mathcal{E}$

$$p_{(e,z)}(0) = E(z) = L_e(z) =< L_e, z > .$$

Als Dualraum eines teilweise geodneten Vektorraumes hat auch $\mathcal{V}'$ eine natürliche Teilordnung. Diese wird durch den Kegel

$$\mathcal{C}' := \{L | (\forall x \in \mathcal{C}) \ < L, x > \geq \ 0\} = \{L | (\forall z \in \mathcal{Z}) \ < L, z > \geq \ 0\}$$

definiert. Diese Kegel ist ebenfalls erzeugend, denn ist $L \in \mathcal{C}' \cap -\mathcal{C}'$, dann gilt für $x = y_1 - y_2$, $y_1, y_2 \in \mathcal{C}$ sowohl $0 \leq < L, y_1 > \leq 0$ als auch $0 \leq < L, y_2 > \leq 0$

und wegen der Stetigkeit von L ist auch für $x \in \mathcal{V}$ $L(x) = 0$. Gilt für $L_1, L_2 in \mathcal{V}'$ $L_1 < L_2$, dann heißt die Menge

$$[L_1, L_2] := \{L | L_1 \leq L \leq L_2\}$$

ein Ordnungsintervall.

Das beschränkte lineare Funktional $\mathbf{1}$ auf $\mathcal{V}$ durch $\mathbf{1}(z) = 1$ für alle $z \in \mathcal{Z}$ festliegt, heißt die *Ordnungseinheit* von $\mathcal{V}'$. als lineares Funktional auf dem Zustandsraum bestimmt die Ordnungseinheit in $\mathcal{V}$ die Hyperebene

$$\mathcal{V} \supseteq \{x | \mathbf{1}(x) = 1\} \supseteq \mathcal{Z},$$

die die konvexe Zusatndsmernge enthält, welchh letztere mit $\mathrm{conv}(\mathcal{Z} \cup -\mathcal{Z})$ die Einheitskugel und damit die Basisnorm in $\mathcal{V}$ bestimmt. Die Einheitskugel im um Banach Dualraum $\mathcal{V}'$ ist das Ordnungsintervall $[-\mathbf{1}, \mathbf{1}]$, denn

$$\begin{aligned}
\{L | \sup_{x \in \mathcal{V}} \frac{L(x)}{\|x\|} \leq 1\} &= \{L | (\forall x \in \mathcal{V}) \frac{|L(x)|}{\|x\|} \leq 1\} \\
&= \{L | (\forall x \in \mathcal{V}) \frac{| < L, x > |}{\|x\|} \leq 1\} \\
&= \{L | (\forall z \in \mathcal{Z}) | < L, z > | \leq 1\} \\
&= \{L | (\forall z \in \mathcal{Z}) - 1 \leq < L, z > \leq 1 \\
&= \{L | -\mathbf{1} \leq L \leq \mathbf{1}\} = [-\mathbf{1}, \mathbf{1}].
\end{aligned}$$

$\mathcal{V}'$ heißt deshalb auch *Ordnungseinheitsraum*. Die Menge der durch die Effekte e bestimmten linearen Funktionale L_e, die wir künftig mit E und deren Menge mit $\mathcal{E}$ bezeichnen werden, ist in $\mathcal{V}'$

$$\mathcal{E} = [0, \mathbf{1}],$$

wobei das Nullfunktional, das im Gegensatz zu $\mathbf{1}$ für jeden Zustand die Wahrscheinlichkei 0 für das Messergebnis 0 zuordnet, keine eigentliche Bedeutung als Effekt hat.

Diese Struktur ist im Wesentlichen durch das evidente Mischungaxiom bestimmt. Die durch die Basisnorm gegebene Topologie ist äquivalent zu einer Topologie, die ebenfalls sehr anschaulich operational dorch einen Mischungsdistanzfunktin bestimmt werden kann. Dazu siehe *Stanley Gudder: Stochastic Methods in Quantum Mechanics, North Holland Inc., New York, Oxford (1979).*

1.4 *Der Zustandsraum derklassischen Wahrscheinlichkeitstheorie* : Ausgangspunkt der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie ist eine Menge Ω, die man sich etwa als die Skala eines Messgerätes vorstellen kann. Ist Ω endlich oder abzählbar, dann interpretiert man die Potenzmenge, $\mathcal{P}(\Omega)$, als die Menge der möglichen Ereignisse in folgendem Sinne: Liegt das Ergebnis eines Versuches c in $C \in \mathcal{P}(\Omega)$, dann ist das Ereignis C eingetraten, und somit bei diesen Versuch wahr. Liegt es im Komplement $\Omega \setminus C$, dann ist das Ereignis C nicht eingetreten, und somit bei diesem Versuch falsch. Als distributiver Mengenverband wird $\mathcal{P}(\Omega)$ auch als Logik der Messergebnisse gedeutet, wobei $\Omega \setminus C$ die Verneinung von C, $C_1 \cap C_2$ die Konjunktion und $C_1 \cup C_2$ die Disjunktion der Ereignisse C_1 und C_2 darstellen. Ist Ω ein Kontinuum, dann muss man ein Teilmengensystem als Ereignisalgebra einführen, eine sogenannte σ-Algebra, die Ω enthält und abgeschollen bezüglich Komplementbildung und die Bildung abzählbarer Vereinigungen und Durchschnitte ist. Dann bleiben die vorstehend beschriebenen Interpretationen uneingeschränkt ihren Sinn und überdies lässt sich ein Integralbegriff einführen. Trägt Ω, wie etwa die reelle Achse oder ein Teil davon, eine Topologie, dann liegt durch die offenen Mengen und deren abzählbare Vereinigunen, sowie durch die abgeschlossenen Mengen und deren Abzählbare Durchschnitte, eine σ-Algebra $\mathcal{B}(\Omega)$ fest, deren Elemente *Borelmengen* genannt werden.

Sei nun ein Versuchsaufbau im Sinne von Abschniit 1.3 gegeben. Dann bilden die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten oder Ausbleiben der Ereignisse ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf der σ-Algebra, etwa $\mathcal{B}(\Omega)$, mit den folgenden definierenden Eigenschaften:

$$\begin{array}{ll}
(i) & \mu : \mathcal{B}(\Omega) \longrightarrow [0,1] \\
(ii) & \mu(\Omega) = 1 \\
(iii) & \mu(\Omega \setminus C) = 1 - \mu(C) \\
(vi) & C_k \cap C_l = \emptyset,\ i \neq k \implies \mu(\bigcup_k C_k) = \sum_k \mu(C_k),
\end{array}$$

wobei (iv) für endliche und abzählbar unendliche Folgen von Ereignissen gefordert ist. Diese Eigenschaften gelten offensichtlich auch für konvexe Linearkombinationen von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathcal{B}(\Omega)$. Die Zustandsmenge $\mathcal{Z}$ ist die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{B}(\Omega)$. Der Zustandsraum ist der reelle Vektorraum der signierten Maße $\kappa = \alpha_1\mu_1 - \alpha_2\mu_2$, $0 \leq \alpha_i \in \mathbf{R}$, $\mu_i \in \mathcal{Z}$. Die reinen Zustände sind die Punktmaße $\mu_\omega,\ \omega \in \Omega$, für die $\mu_\omega(\{\omega\}) = 1$ gilt.