Zusammenfassung der 4. Vorlesung (11.05.09)

1. Klassische Information und Quanteninformation (Fortsetzung)

1.4 *Der Zustandsraum der klassischen Wahrschrinlichkeitstheorie (Fortsetzung)* :

Positve beschränkte affine Funktionale auf der Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf einer σ-Algebra, etwa $\mathcal{B}(\Omega)$, sind in natürlicher Weise durch messbare Funktionen und das Maßintegral gegeben. Eine reellwertige Funktion $f : \Omega \to \mathbf{R}$ heißt messbar, wenn das Urbild einer Borelmenge der rellen Achse, etwa b, die ,mit $f^{-1}(b)$ bezeichnet wird, in $\mathcal{B}(\Omega)$ enthalten ist: $f^{-1}(b) \in \mathcal{B}(\Omega)$. Ist f nicht negativ und mit $C < \infty$ beschränkt, dann betrachtet man Zerlegungen von $[0, C)$ in etwa rechtsoffene Instervalle $[a_{n-1}a_n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots, N$, $a_0 = 0$, $a_N = C$ und dazu die Summen

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{n=1}^{N} a_{n-1}\mu(f^{-1}([a_{n-1}, a_n))) &\leq C \sum_{n=1}^{N} \mu(f^{-1}([a_{n-1}, a_n))) \\ &= C\mu(f^{-1}([0, C))) = C. \end{aligned}$$

Bei unbegrenzter Verfeinerung einer Zerlegung, d.h. die einzelnen Intervalle werden weiter zerlegt, bilden die zugehörigen Summen eine unendliche Folge nicht abnehmender Zahlen, die mit C beschränkt ist und mithin einen Grenzwert hat. Da es für zwei Zerlegungen immer eine solche gibt, die beide verfeinert, ist der Grenzwert wohldefiniert und liefert ein positives mit C beschränktes affines Funktional auf Z:

$$L(\mu) := \int f d\mu := \lim \sum_{n=1}^{N} a_{n-1}\mu(f^{-1}([a_{n-1}, a_n))) \leq C.$$

Speziell hat für $0 \leq f \leq 1$ das Funktional die Eigenschaften eines Effektes. Im Allgemeinen geht man davon aus, dass die σ Algebra so "grob" gewählt werden kann, dass alle Wahrscheinlichkeitsmaße und alle zu den messbaren Funktionen f, $0 \leq f \leq 1$ gehörenden Funktionale operational machbar sind, aber ob das so ist, können wir hier nicht klären. Ebenso werden wir hier nicht klären, ob alle positiven beschränkten affinen Funktionale auf diese

Weise durch ein Maßintegral dargestellt werden können. Jedenfalls liefert für ein signiertes Maß $\kappa = \alpha_1\mu_1 - \alpha_2\mu_2$, $\alpha_i \geq 0$

$$L(\kappa) = \alpha_1 L(\mu_1) - \alpha_2 L(\mu_2)$$

die eindeutige lineare Fortsetzung der durch Maßintegrale dargestellten Effekte auf den Zustandsraum. Allgemeinere beschränkte lineare Funktionale auf dem Zustandsraum $\mathcal{V}$ sind durch die integrierbaren messbaren Funktionen auf Ω gegeben. Dabei heißt eine messbare Funktion g imtegrierbar, wenn die nicht negativen Funktionen

$$g_+ := \frac{1}{2}(|g| + g) \quad \text{und} \quad g_- := \frac{1}{2}(|g| - g)$$

beide beschränkt sind. Es ist dann

$$L(\kappa) =< L, \kappa >= \alpha_1(\int g_+ d\mu_1 - \int g_- d\mu_1) - \alpha_2(\int g_+ d\mu_2 - \int g_- d\mu_2).$$

Die Funktion, die jedes Element von Ω auf eins abbildet, liefert die Ordnungseinheit $\mathbf{1}$ von $\mathcal{V}'$, und die Funktionale in $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ stellen Effekte dar.

1.4 *Der Zustandsraum der Quantenmechannik* : Die Zustandsmenge $\mathcal{Z}$ eines Quantensystems ist die Menge der hermitesschen positiven Spurklasseoperatoren ρ auf einem Hilbertrtraum $\mathcal{H}$ mit $\mathrm{tr}\rho = 1$, diese werden auch Dichteoperatoren genannt. Für ein beliebiges vollständiges Orthonormalsystem $\{\varphi_v\}$ ist die Spur eines positiven linearen Operators auf $\mathcal{H}$

$$\mathrm{tr}\rho := \sum_\nu < \varphi_\nu, \rho\varphi_\nu > .$$

Dass die die Spur wohldefiniert ist, wird leicht klar, wenn man bedenkt, dass jedes Paar solcher Orthonormalsysteme durch eine unitäre Transformation verknüpft ist: Mit $U = \sum_\mu |\psi_\mu >< \varphi_\mu|$ ist $\psi_\mu = U\varphi_\mu = \sum_\nu \varphi_\nu < \varphi_\nu, \psi_\mu >$

und

$$\begin{aligned}
\sum_\mu < \psi_{\mu)}, A\psi_\mu > &= \sum_\mu < U\varphi_\mu, AU\varphi_\mu > \\
&= \sum_{\mu,\nu,\sigma} < \varphi_\nu < \varphi_\nu, \psi_\mu >, A\varphi_\sigma < \varphi_\sigma, \psi_\mu >> \\
&= \sum_{\mu,\nu,\sigma} < \psi_\mu, \varphi_\nu >< \varphi_\sigma, \psi_\mu >< \varphi_\nu, A\varphi_\sigma > \\
&= \sum_{\nu,\sigma} < \varphi_\sigma, \varphi_\nu >< \varphi_\nu, A\varphi_\sigma > \\
&= \sum_\nu < \varphi_\nu, \rho\varphi_\nu > .
\end{aligned}$$

Eine wichtige Regel für das Rechnen mit dem Spurfunktional ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(ABC) &= \sum_{\mu,\nu,\sigma} < \varphi_\mu, A\psi_\nu >< \psi_\nu, B\chi_\sigma >< \chi_\sigma, C\varphi_\mu > \\
&= \sum_{\sigma,\mu,\nu} < \chi_\sigma, C\varphi_\mu >< \varphi_\mu, A\psi_\nu >< \psi_\nu, B\chi_\sigma >= \mathrm{tr}(CAB).
\end{aligned}$$

Zyklisches Umordnen von Produkten im Argument der Spur ist unabhängig von der Vertauschbarkeit der Operatoren erlaubt. A gehört genau dann der Spurklasse an, wenn mit $|A| := \sqrt{A^+A}$

$$\mathrm{tr}|A| = \sum_{nu} < \varphi_{nu}, |A|\varphi_{nu} >\leq C < \infty$$

ist. Die Spurklasseopertoren bilden eine **C**-lineare Unteralgebra $\tau^1(\mathcal{H})$ der Algebra $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ der beschränkten linearen Operatoren und haben überdies die Eigenschaften eines zweiseitigen Ideals: Mit $A \in \tau^1(\mathcal{H})$ und $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist auch $AB \in \tau^1(\mathcal{H})$ und $BA \in \tau^1(\mathcal{H})$. Ferner hat $\mathrm{tr}|A|$ die Eigenschaften einer Norm und $\tau^1(\mathcal{H})$ ist mit $\|a\|_1 := \mathrm{tr}|A|$ vollständig, also ein Banachraum. Diese Eigenschaften hat auch die **R**-lineare Unteralgebra der hermiteschen Spurklasseoperatoren $\tau^1_h(\mathcal{H})$. Da mit einem hermiteschen Operator A auch die positiven Operatoren

$$A_+ := \frac{1}{2}(|A| + A) \quad \text{und} \quad A_- := \frac{1}{2}(|A| - A)$$

der Spurklasse angehören, gilt für $A \in \tau_h^1(\mathcal{H})$ stets

$$A = \alpha_1\rho_1 - \alpha_2\rho_2,\ \rho_1 = \frac{A_+}{\mathrm{tr}A_+} \in \mathcal{Z},\ \rho_2 = \frac{A_-}{\mathrm{tr}A_-} \in \mathcal{Z},\ \alpha_1 = \mathrm{tr}A_+,\ \alpha_2 = \mathrm{tr}A_-.$$

Die Zustandsmenge $\mathcal{Z}$ ist die Basis des positiven Kegels $\mathcal{C}$ von $\tau_h^1(\mathcal{H})$ und dieser Kegel ist erzeugend. Da $|A| = A_+ + A_-$ ist, gilt

$$\|A\|_1 = \mathrm{tr}(A_+ + A_-) = \mathrm{tr}(\alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2) = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Andererrseits ist

$$A = \alpha_1\rho_1 + \alpha_2(-\rho_2) = (\alpha_1+\alpha_2)\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\rho_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}(-\rho_2)\right) = (\alpha_1+\alpha_2)x,$$

wobei $x \in \mathrm{conv}(\mathcal{Z} \cup (-\mathcal{Z}))$. Für die Basisnorm $\|A\|$ gilt also $\|A\| \leq \|A\|_1$. Nun gilt $\|A\|_1 = \alpha_1' + \alpha_2'$ wenn nur $A = \alpha_1'\rho_1' - \alpha_2'\rho_2'$ mit $0 \leq \alpha_1', \alpha_2' \in \mathbf{R}$ und $\rho_1', \rho_2' \in \mathcal{Z}$ gelten. Wenn man zeigen kann, dass es für jedes $A \in \tau_h(\mathcal{H})$ eine solche Zerlegung mit $\|A\| = \alpha_1' + \alpha_2'$ gibt (minimale Zerlegungseigenschaft), dann ist $\|.\|_1 = \|.\|$ die Basisnorm. Die minimale Zerlegunseigenscft wird in der Literatur für $\tau_h^1(\mathcal{H})$ bewiesen. Damit ist der Zustandsraum für Quantensysteme $\mathcal{V} = \tau_h^1(\mathcal{H})$. Man kann zeigen, dass ein Spurklasseoperator motwendig vollstetig ist, und damit ein rein diskretes beschränktes Spektrum hat, bei dem ein sich die Eigenwerte höchstens bei 0 häufen können. Detaillierte Herleitungen dieser und anderer Eigenschaften der Spurklasseoperatoren findet man in Robert Schatten [*Norm Ideaals od cCompletely continuous Operators.*Ergebnisse der Mathematik und ihrer Granzgebiete , Band 27, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg , New York (1970)]. Insbesondere folgt für die Spektralzerlegung von $\rho \in \mathcal{Z}$, dass

$$\rho = \sum_{nu} \lambda_\nu |\psi_\nu >< \psi_\nu|, \lambda_\nu \geq 0, \sum_{nu} \lambda_\nu = 1, < \psi_\nu, \psi_\mu >= \delta_{\mu\nu.}$$

Die reinen Zustände sind die Dichteoperatoren vom Rang eins, $|\psi >< \psi|$, $\|\psi\| = 1$. Dies folgt daraus, dass die Hyperebene $\{x \in \mathcal{V} | \mathrm{tr}(x|\psi >< \psi|) = 1\}$ die Zustandsmenge $\mathcal{Z}$ in genau einem Punkt trifft, mämlich in $|\psi >< \psi|$, denn für $\rho \neq |\psi >< \psi|$ ist $\mathrm{tr}(\rho|\psi >< \psi|) =< \psi, \rho\psi >< 1$. Wir geben noch einen anderen Beweis nach der Betrachtung der Effekte. $\rho \in \mathcal{Z}$ ist stetes ein Gemisch reiner Zustände, aber nur in der Spektraldarstellung bei abwesender Entartung liegen die Mischungskomponenten fest. Dies steht in krassem Gegensatz zur klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie und ist eine Folge des Überlagerungsprinzips: Zum Beispiel gibt es neben den Zuständen $|\varphi >< \varphi|$ und $|\psi >< \psi|$ mit $a, b, \in \mathbf{C}$, $|a|^2 + |b|^2 = 1$ auch die Zustande

$$|a\varphi + b\psi >< a\varphi + b\psi| = |a|^2|\varphi >< \varphi| + |b|^2|\psi >< \psi| + |\psi >< \psi|$$

mit dem Spurfreien Interferenzterm

$$|\psi >< \psi| = \overline{a}b|\varphi >< \psi| + \overline{b}a|\psi >< \varphi|$$

gibt.

Der reelle Banach Dualraum des Zustandsraumes $\tau_h^1(\mathcal{H})$ besteht aus den linearen Funktionalen $\tau_h^1(\mathcal{H}) \ni A \mapsto \mathrm{tr}(AB),\ \ B \in \mathcal{L}_h(\mathcal{H})$, wobei $\mathcal{L}_h(\mathcal{H})$ der relle Vektoraum der beschränkten hermiteschen linearen Operatoren ist. Wegen $\mathrm{tr}(A(\beta B + \gamma C) = \beta \mathrm{tr}(AB) + \gamma \mathrm{tr}(AC)$ nennt man gelegentlich $\mathcal{L}_h(\mathcal{H})$ den Dualraum und charakterisiert die Effekte E durch $\mathbf{0} \leq E \leq \mathbf{1}$ anststelle von $\mathrm{tr}(.\mathbf{0}) \leq \mathrm{tr}(.E) \leq \mathrm{tr}(.\mathbf{1})$. Die Operatoren $\mathcal{L}_h(\mathcal{H})$ werden Effektoperatoren oder schlicht Effekte genannt, Sie stellen die Effekte über das Spurfunktional dar. Ihr Spektrum kann im Falle $\dim \mathcal{H} = \infty$ diskret oder kontinuierlich sein. Effekte mit dem Spektrum $\{0, 1\}$, d.h. Orthogonalprojektoren, heißen Entscheidungseffekte oder auch Propositionen. Sie bilden mit der Teilordnun von $\mathcal{V}'$ eine orthokomplementären, orthomodularen. jedoch nicht distributiven Verband, der als *Quantenlogik* interpretiert wird. Für uns ist nur wichtig, zu wissen, dass orthokomplementäre Unterverbände genau dann distributiv sund, wenn sie aus paarweise verstauschbaren Propositionen bestehen. Solche werden durch die Spektrakzerlegung selbstadjungierter Operatoren bestimmt und stellen die klassische Logik der Ereignisse bei der Messung der dem Operator zugeordnenten Observablen dar. Umgekehrt kann man zu jedem distributiven Unterverband selbstadjungierte Operatoren konstruieren.

1.5 *Der Zustandsraum des Qubits, die Blochkugel* : Der Zustandsraum eines zwei-Niveau-Systems, das durch die linearen Operatoren des $\mathbf{C}^2$ beschrieben wird, ist der vierdimensionale relle Raum der hermiteschen 2×2-Matrizen, der von der Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ und den Pauli Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird. Die Dichteoperatoren liegen auf der dreidimensionalen Hyperebene $\mathbf{H} = \{A|\mathrm{tr}A = 1\}$ und die Abildung

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^3 \ni a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \frac{1}{2}(\mathbf{1} + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3) \\ & = & \frac{1}{2}\left(\mathbf{1} + \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix}\right) \in \mathbf{H} \end{aligned}$$

ist affin und bijektiv. Zur Abkürzung schreiben wir

$$a \cdot \sigma := a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix}.$$

Mit $\sigma_i^2 = 1$ und $\sigma_i\sigma_j = i\sigma_k$, (i, j, k) zyklisch, $\sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i$ und $a, b \in \mathbf{R}$ folgt

$$(a \cdot \sigma)(b \cdot \sigma) = (a \cdot b)\mathbf{1} + i(a \times b) \cdot \sigma,$$

was man leicht zeigt, wenn man die linke Seite als Summe ausschreibt:

$$(a \cdot \sigma)(b \cdot \sigma) = \sum_{j,k} a_j b_k \sigma_j \sigma_k = \sum_j a_j b_j \sigma_j^2 + \sum_{j<k} (a_j b_k - a_k b_j)\sigma_j\sigma_k.$$

Wegen der Antisymmetrie von $a \times b$ folgt weiter

$$\frac{1}{2i}[(a \cdot \sigma), (b \cdot \sigma)] = (a \times b) \cdot \sigma,$$

und dies bildet die Grundlage der räumlichen Spinkinematik. Schreibt man nun mit $e \in \mathbf{R}^3$, $\|e\| = 1$ für das Vektorfeld, das die Drehungen in positiver Richtung um die e-Achse erzeugt

$$\mathbf{R}^3 \ni b \longmapsto e \times b = (e_1M_1 + e_2M_2 + e_3M_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =: (e \cdot M) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$$

$$\left(e_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + e_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

dann ist die durch die Exponentialreihe definierte Einparametergruppe die der räumlichen Drehungen mit dem Winkel φ in positiver Richtung um die e-Achse:

$$R_e(\varphi) := e^{(e\cdot M)\varphi} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(e \cdot M)^n \varphi^n, \ \left.\frac{d}{d\varphi} R_e\right|_{\varphi} = R_e(\varphi)(e \cdot M), \ R_e(0) = \mathbf{1},$$

$$R_e(\varphi_1+\varphi_2) = R_e(\varphi_1)R_e(\varphi_2), \qquad R_e(\varphi+2\pi) = R_e(\varphi).$$

Betrachtet man nun die Einparametergruppe der unitären (2×2)-Matrizen

$$D_e(\varphi) := e^{-i(e\cdot\sigma)\frac{\varphi}{2}} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(e\cdot\sigma)^n \left(\frac{\varphi}{2i}\right)^n, \ \frac{d}{d\varphi} D_e\bigg|_{\varphi} = \frac{1}{2i} D_e(\varphi)(e\cdot\sigma),$$

$$D_e(0) = \mathbf{1}, \quad D_e(\varphi_1+\varphi_2) = D_e(\varphi_1)D_e(\varphi_2),$$
$$D_e(\varphi+2\pi) = -D_e(\varphi), \quad D_e(\varphi+4\pi) = D_e(\varphi),$$

dann gilt

$$\frac{d}{d\varphi}(D_e(b\cdot\sigma)D_e^{+}\bigg|_{\varphi} = \frac{1}{2i} D_e(\varphi)[(e\cdot\sigma),(b\cdot\sigma)]D_e^{+}(\varphi).$$