Zusammenfassung der 5. und 6. Vorlesung (18.05.09)

(2. korrigierte Version)

1. Klassische Information und Quanteninformation (Fortsetzung)

1.5 *Der Zustandsraum des Qubits, die Blochkugel* : Der Zustandsraum eines zwei-Niveau-Systems, das durch die linearen Operatoren des $\mathbf{C}^2$ beschrieben wird, ist der vierdimensionale relle Raum der hermiteschen 2×2-Matrizen, der von der Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ und den Pauli Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird. Die Dichteoperatoren liegen auf der dreidimensionalen Hyperebene $\mathbf{H} = \{A | \mathrm{tr} A = 1\}$ und die Abildung

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^3 \ni a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad & \longmapsto \quad \frac{1}{2}(\mathbf{1} + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3) \\ & = \quad \frac{1}{2}\left(\mathbf{1} + \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix}\right) \in \mathbf{H} \end{aligned}$$

ist affin und bijektiv. Zur Abkürzung schreiben wir

$$a \cdot \sigma := a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix}.$$

Mit $\sigma_i^2 = 1$ und $\sigma_i\sigma_j = i\sigma_k$, (i,j,k) zyklisch, $\sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i$ und $a, b \in \mathbf{R}^3$ folgt

$$(a \cdot \sigma)(b \cdot \sigma) = (a \cdot b)\mathbf{1} + i(a \times b) \cdot \sigma,$$

was man leicht zeigt, wenn man die linke Seite als Summe ausschreibt:

$$(a \cdot \sigma)(b \cdot \sigma) = \sum_{j,k} a_j b_k \sigma_j \sigma_k = \sum_j a_j b_j \sigma_j^2 + \sum_{j<k} (a_j b_k - a_k b_j)\sigma_j\sigma_k.$$

Wegen der Antisymmetrie von $a \times b$ folgt weiter

$$\frac{1}{2i}[(a \cdot \sigma), (b \cdot \sigma)] = (a \times b) \cdot \sigma,$$

und dies bildet die Grundlage der räumlichen Spinkinematik. Schreibt man nun mit $e \in \mathbf{R}^3,\ \|e\| = 1$ für das Vektorfeld, das die Drehungen in positiver Richtung um die e-Achse erzeugt

$$\mathbf{R}^3 \ni b \longmapsto e \times b = (e_1 M_1 + e_2 M_2 + e_3 M_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =: (e \cdot M) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$$

$$\left(e_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + e_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

dann ist die durch die Exponentialreihe definierte Einparametergruppe die der räumlichen Drehungen mit dem Winkel φ in positiver Richtung um die e-Achse:

$$R_e(\varphi) := e^{(e \cdot M)\varphi} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(e \cdot M)^n \varphi^n,\ \frac{d}{d\varphi} R_e \Big|_{\varphi} = R_e(\varphi)(e \cdot M),\ R_e(0) = \mathbf{1},$$

$$R_e(\varphi_1 + \varphi_2) = R_e(\varphi_1) R_e(\varphi_2), \qquad R_e(\varphi + 2\pi) = R_e(\varphi).$$

Betrechtet man nun die Einparametergruppe der unimodularen unitären (2×2)-Matrizen

$$D_e(\varphi) := e^{-i(e \cdot \sigma)\frac{\varphi}{2}} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(e \cdot \sigma)^n \left(\frac{\varphi}{2i}\right)^n,\ \frac{d}{d\varphi} D_e \Big|_{\varphi} = \frac{1}{2i} D_e(\varphi)(e \cdot \sigma),$$

$$D_e(0) = \mathbf{1}, \quad D_e(\varphi_1 + \varphi_2) = D_e(\varphi_1) D_e(\varphi_2),$$
$$D_e(\varphi + 2\pi) = -D_e(\varphi), \quad D_e(\varphi + 4\pi) = D_e(\varphi),$$

dann gilt

$$\frac{d}{d\varphi}(D_e(b \cdot \sigma) D_e^+ \Big|_{\varphi} = \frac{1}{2i} D_e(\varphi)[(e \cdot \sigma), (b \cdot \sigma)] D_e^+(\varphi).$$

Wit verknüpfen nun die Gruppe $O(3)$ der räumlichen Drehungen im $\mathbf{R}^3$ mit der Gruppe der unimodularen unitären Transformationen $SU)(2)$, der

Drehungen des Spins. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\varphi}(D_e(-\varphi)(R_e(\varphi)b)\cdot\sigma)D_e^+(-\varphi)) = \\
&-\frac{1}{2i}D_e(-\varphi)(e\cdot\sigma)(R_e(\varphi)b)\cdot\sigma)D_e^+(-\varphi) \\
&+(D_e(-\varphi)(e\times R_e(\varphi)b)\cdot\sigma)D_e^+(-\varphi)) \\
&+\frac{1}{2i}(D_e(-\varphi)(R_e(\varphi)b)\cdot\sigma)(e\cdot\sigma)D_e^+(-\varphi)) = \\
&D_e(-\varphi)((e\times R_e(\varphi)b)\cdot\sigma) - \frac{1}{2i}[(e\cdot\sigma),(R_e(\varphi)b)\cdot\sigma)])D_e^+(-\varphi) = 0,
\end{aligned}$$

weil $\frac{1}{2i}[(a\cdot\sigma),(c\cdot\sigma)] = (a\times c)\cdot\sigma$ für $a,c\in\mathbf{R}^3$ gilt, wie wir oben gezeigt haben.. Der differenzierte Ausdruck ist also konstant und für $\varphi=0$ ist er gleich $b\times\sigma$. Damit gilt für alle φ

$$D_e(-\varphi)(R_e(\varphi)b)\cdot\sigma))D_e^+(-\varphi)) = b\cdot\sigma,$$

also die Kovarianzbeziehung

$$(R_e(\varphi)b)\cdot\sigma = D_e(\varphi)(b\cdot\sigma)D_e^+(\varphi),$$

die die räumlichen Drehungen mit den Spindrehungen verknüpft. Bemerke, dass sich $D(2\pi) = -\mathbf{1}$ in der Kovarianzbeziehung nicht auswirkt.

Wir kommen nun zu unserer unsprüglichen Problematik zurück: Die Operatoren $A = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + b\cdot\sigma)$ erfüllen $\mathrm{tr}A = 1$, sind aber nicht notwendig positiv. Mit

$$b = \|b\|\mathbf{e}(\Theta,\Phi), \qquad \mathbf{e}(\Theta,\Phi) := \begin{pmatrix} \sin\Theta\cos\Phi \\ \sin\Theta\sin\Phi \\ \cos\Theta \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e_3} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und $e := \mathbf{e}(\Theta,\Phi)\times\mathbf{e_3}$ liefert die Kovarianzbeziehung

$$D_e(\Theta)(b\cdot\sigma)D_e^+(\Theta) = R_e(\Theta)b)\cdot\sigma = \|b\|\sigma_3,$$

und damit

$$D_e(\Theta)\frac{1}{2}(\mathbf{1} + b\cdot\sigma)D_e^+(\Theta) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \|b\|\sigma_3)$$

mit dem Spektrum $\{\frac{1}{2}(1-\|b\|), \frac{1}{2}(1+\|b\|)\}$. Wegen der Unitarität von $D_e(\Theta)$ ist dies auch das Spektrum von $b \cdot \sigma$. Damit haben wir gezeigt:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{1} + b \cdot \sigma) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|b\| \leq 1.$$

Wir fassen die die Qubit Zustände betreffenden Ergebnisse in folgendem Satz zusammen:

Satz: Der Zustandsraum $\mathcal{V}$ des Qubits ist der reelle vierdimensionale Vektorraum der hermiteschen (2×2)-Matrizen. Die Menge der Zustände $\mathcal{Z}$ ist die konvexe Teilmenge der Operatoren

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + r\mathbf{e}(\Theta, \Phi) \cdot \sigma), \qquad 0 \leq r \leq 1,$$

die *Blochkugel* genannt wird, und die auf der Hyperebene $\mathbf{H} = \{A|\mathrm{tr}A = 1\}$ liegt. Die Blochkugel ist ein bijektivs und affines Bild der abgeschlossenen Einheitskugel des $\mathbf{R}^3$, der Vektor $b = r\mathbf{e}(\Theta, \Phi)$ heisst *Blochvektor* des Zustands ρ. Die reinen Zustände sind die Extremalpunkte der Blochkugel, also der Rand der Blochkugel, der auch *Blochsphäre* genannt wird.

Wir betrachten n un die Basis der n ormierteen Eigenvektoren von σ_3

$$\sigma_3|0>=|0>, \quad \sigma_3|1>=-|1>, \quad \sigma_3 = |0><0| - |1><1|,$$

dann ist

$$|0><0| = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \sigma_3), \qquad\qquad |1><1| = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \sigma_3),$$

d.h. die Blochvektoren dieser reinen Zustände sind $\mathbf{e_3}$, beziehungsweise $-\mathbf{e_3}$. Wegen

$$D_e(\Theta) = e^{-i(e\cdot\sigma)\frac{\Theta}{2}} = \cos\frac{\Theta}{2} - i(e \cdot \sigma)\sin\frac{\Theta}{2}$$

ergeben sich mit $\tilde{e} = \mathbf{e_3} \times \mathbf{e}(\frac{\pi}{2}, \Phi) = \mathbf{e}(\frac{\pi}{2}, \Phi + \frac{\pi}{2})$ und $\tilde{e} \cdot \sigma = -\sigma_1 \sin\Phi + \sigma_2 \cos\Phi$ die Eigenvektoren von $\mathbf{e}(\Theta, \Phi) \cdot \sigma = D_{\tilde{e}}(\theta)\mathbf{e_3}D_{\tilde{e}}^+(\theta)$ zum Eigenwert 1

$$\begin{aligned}
\psi_0(\Theta, \Phi) = D_{\tilde{e}}(\Theta)|0> &= \begin{pmatrix} |0> & |1> \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\Theta}{2} & -e^{-i\Phi}\sin\frac{\Theta}{2} \\ e^{i\Phi}\sin\frac{\Theta}{2} & \cos\frac{\Theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \cos\frac{\Theta}{2}|0> + e^{i\Phi}\sin\frac{\Theta}{2}|1>
\end{aligned}$$

und zum Eigenwert -1

$$\psi_1(\Theta,\Phi) = D_{\tilde{e}}(\Theta)|1> \;=\; \begin{pmatrix} |0> & |1> \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\Theta}{2} & -e^{-i\Phi}\sin\frac{\Theta}{2} \\ e^{i\Phi}\sin\frac{\Theta}{2} & \cos\frac{\Theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= -e^{-i\Phi}\sin\frac{\Theta}{2}|0> + \cos\frac{\Theta}{2}|1> .$$

Die Blochvektoren der Dichteoperatoren für diese reinen Zustände folgen aus der Kovarianzbeziehung

$$|\psi_0(\Theta,\Phi)><\psi_0(\Theta,\Phi)| = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + (R_{\tilde{e}}(\Theta)\mathbf{e_3})\cdot\sigma) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{e}(\Theta,\phi)\cdot\sigma)$$

und

$$|\psi_1(\Theta,\Phi)><\psi_1(\Theta,\Phi)| = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - (R_{\tilde{e}}(\Theta)\mathbf{e_3})\cdot\sigma) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{e}(\Theta,\phi)\cdot\sigma).$$

Die inneren Punkte der Blochsphäre sind Gemische der reinen Zustände auf der Blochsphäre. Jeder gegebne gemischte Zustand ρ kann so zerlegt werden, dasss er einen beliebigen reinen Zustand $|\psi><\psi|$ als Komponente enthält: Zum Beispiel ist

$$\rho = \lambda|\psi><\psi| + (1-\lambda)|\phi><\phi|, \qquad 0<\lambda<1,$$

wobei $|\phi><\phi|$ der andere Schnittpunkt der durch $|\phi><\phi|$ und ρ bestimmten Geraden mit der Blochsphäre ist. Nur die Gerade, die neben ρ, ein Antipodenpaar der Blochsphäre enthält, ist eindeutig und liefert die Spektralzerlegung von ρ.

Die Menge der Effekte $\mathcal{E}$ des Qubits ist durch die Menge der hermiteschen (2×2)-Matrizen F mit $\mathbf{0}\le F\le \mathbf{1}$ bestimmt, wobei $E_F(\rho) = \mathrm{tr}(F\rho)\in[0,1]$ das affine Funktional auf der Blochsphäre ist, das den Effekt darstellt. Zur Menge dieser Operatoren gehören auch die Matrizen der Blochsphäre selbst, denn $\mathbf{0} < \frac{1}{2}\mathbf{1} \le \rho \le \mathbf{1}$. Insbesondere sind die $|\psi><\psi|$, $\|\psi\| = 1$, Effekte. Ist $(|\psi><\psi|, |\phi><\phi|)$ ein Antipodenpaar, etwa

$$|\psi><\psi| = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{e}(\Theta,\Phi)\cdot\sigma), \qquad |\phi><\phi|) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{e}(\Theta,\Phi)\cdot\sigma),$$

dann gilt $|\psi><\psi|\phi><\phi| = 0$, $|\psi><\psi| + |\phi><\phi| = \mathbf{1}$ und die Qubitobservable $\mathbf{e}(\Theta,\Phi)\cdot\sigma$ (bei Spin-$\frac{1}{2}$-Systemen ist diese Opservable das $\frac{4\pi}{h}$-fache der Spinprojektion auf $\mathbf{e}(\Theta,\Phi)$) hat die Spektralzerlegung

$$\mathbf{e}(\Theta,\phi)\cdot\sigma = |\psi><\psi| - |\phi><\phi|.$$

Bei Ideealmessung dieser Observablen auf dem Zustand ρ ist $E_{|\psi><\psi|}(\rho)$ die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis 1 und und $E_{|\phi><\phi|}(\rho) = 1 - E_{|\psi><\psi|}(\rho)$ die für das Ergebnis -1. Als lineares Funktional auf $\mathcal{V}$ bestimmt $E_{|\psi><\psi|}(\kappa) = \mathrm{tr}(|\psi><\psi|\kappa) = p$ eine Hyperebene in $\mathbf{H}$, die bei der Identifikation von $\mathbf{H}$ mit dem $\mathbf{R}^3$ gemäß $b \mapsto b\cdot\sigma$ die Normale $\mathbf{e}(\Theta,\Phi)$ hat. Für $p \in [0,1]$ schneidet diese Hyperebene die Blochkugel in einer Kreisfläche senkrecht zu $\mathbf{e}(\Theta,\phi)$, die der geometrische Ort aller Zustände κ ist, für die bei der Messung von $\mathbf{e}(\Theta,\phi)\cdot\sigma$ die Wahrscheinlichkeit p für das Ergebnis 1 ist.

Auch die Zustandsänderungen bei Ideamessungemessungen, sogenannte ideale Messoperationen, lassen sich in diesem Bilde geometrisch deuten. Bei nichtselektiver Idealmessung erster Art, d.h. es wird die Gesamtheit der Systeme betrachtet, die das Messgerät passiert haben, ohne sie nach dem Messergebnis in Untergesamheiten zu sortiert zu sammeln, ist bei Messung von $\mathbf{e}(\Theta,\phi)\cdot\sigma$ die Operation

$$\mathcal{J} : \kappa \mapsto \kappa' = |\psi><\psi|\kappa|\psi><\psi| + |\phi><\phi|\kappa|\phi><\phi|.$$

Ist $E_{|\psi><\psi|}(\kappa) =<\psi|\kappa|\psi>= p$, dann ist mit der oben betrachteten Identifikation κ' der Mittelpunkt der Kreisscheibe aller κ mit $E_{|\psi><\psi|}(\kappa) = p$,

$$\kappa' = p|\psi><\psi| + (1-p)|\phi><\phi|.$$

Wird selektiert, dann ist nach der Messung der Zustand der Gesamtheit der Systeme, die das Ergebnis 1 hervorgerufen haben $|\psi><\psi|$ und der Zustand der Gesamtheit derjennigen Systeme, die das Ergebnis -1 hervorgerufen haben, $|\phi><\phi|$.

1.5 *Anhang: Teilweise Ordnung in einem Vektorraum.*

Definition: Ein Vektorraum $\mathcal{W}$ heißt teilweise geordnet, wenn eine zweistellige Relation $\geq$ gegeben ist, so dass für $x, y, z \in \mathcal{W}$ gelten:

$$\begin{array}{ll} (i) & x \geq 0 \;\wedge\; \mathbf{R} \ni \alpha \geq 0 \quad .\Rightarrow. \quad \alpha x \geq 0. \\ (ii) & x \geq y \quad .\Rightarrow. \quad x + z \geq y + z. \end{array}$$

Behauptung: $(ii) \quad .\Leftrightarrow. \quad x \geq y \;\Leftrightarrow\; x - y \geq 0.$

Beweis: Die Implikation ist trivial. Um die Reimplikation u zeigen machen wir die Annahme, dass $x \geq y \;\Leftrightarrow\; x - y \geq 0$ gilt aber (ii) falsch ist, d.h.

$$(\exists a, b, c, \in \mathcal{W})\; a \geq b \;\wedge\; a + c \not\geq b + c.$$

Daraus folgt $a + c - (b + c) = a - b \not\geq 0$ im Widerspruch zu $a \geq b$.

Definition: Eine Teilmenge $\mathcal{C}$ eines Vektorraumes heißt Kegel, falls mit $x \in \mathcal{C}$ und $\mathbf{R} \ni \alpha \geq 0$ auch $\alpha x \in \mathcal{C}$ ist. Ein Kegel $\mathcal{C}$ heißt konvexer Kegel, wenn $\mathcal{C}$ auch konvexe Teilmenge ist. Ein Kegel $\mathcal{C}$ heißt eigentlicher Kegel, wenn $\mathcal{C} \cap (-\mathcal{C}) = \{0\}$ ist.

Satz: Ist $\mathcal{W}$ ein teilweise geordneter Vektorraum, dann ist $\mathcal{C} := \{x \in \mathcal{W} | x \geq 0\}$ ein konvexer Kegel. Ist umgekehrt in einem Vektorraum $\mathcal{W}$ ein konvexer Kegel $\mathcal{C}$ gegeben, dann definiert $x \geq y :\Leftrightarrow x - y \in \mathcal{C}$ eine teilweise Orsnung auf $\mathcal{W}$.

Beweis: Ist die Ordnungsrelation auf $\mathcal{W}$ gegeben, dann ist wegen (i) die Menge $\mathcal{C}$ ein Kegel. Wegen (ii) folgt aus $x \geq 0$ und $y \geq 0$ auch $x+y \geq y \geq 0$. Mithin folgt aus (i), dass mit $0 \leq \lambda \leq 1$ auch $\lambda x + (1 - \lambda)y \geq 0$ gilt. Ist ein konvexer Kegel in $\mathcal{W}$ gegeben, dann gilt für die im Satz definierte Ordnungsrelation (i). Ist $y - x \in \mathcal{C}$ und $z \in \mathcal{W}$, dann ist $x + z - (y + z) = x - y \in \mathcal{W}$ und damit $x + z \geq y + z$, also (ii).

Bemerkung: In einem teilweise geordneten Vwktorraum gilt nicht notwendig $a \geq b \geq a \Rightarrow a = b$. Diese Implikation gelt jedoch stets, wenn der konvexe Kegel eigentlich ist.