Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

24. April 2009

Prof. Dr. A. Knorr
Dr. Ermin Malic,
Dipl.-Phys. Frank Milde

www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss09/wpfv/tfp/

2. Übungsblatt zur Theoretische Festkörperphysik

Abgabe: bis Dienstag 05.05.2009 10:15 Uhr in der Vorlesung.

Aufgabe 3 (12 Punkte): *Linear Kette*

Betrachten Sie eine lineare Atomkette aus zwei Atomsorten. Die erste Sorte habe die Masse m' und ihre Auslenkung aus der Ruhelage x_n sei u'_n. Die Größen der zweiten Atomsorte seinen m'', y_n und u''_n. Der Abstand von x_{n-1} zu x_n sei die Gitterkonstante a. Da die Gleichgewichtslagen von benachbarten Atomen nicht gleich sein müssen nehmen wir unterschiedliche Kraftkonstanten an: Zwischen x_n und y_n sei sie β_1 und zwischen x_n und y_{n-1} betrage die Kraft β_2.

1. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen unter Berücksichtigung der harmonischen und nächsten-Nachbarn-Näherung auf.
2. Lösen Sie das Gleichungssystem mit einem Exponentialansatz und bestimmen Sie die Dispersionsrelation ω_q. Sind die Frequenzen immer reell? Warum?
3. Führen Sie eine Taylorentwicklung beider Moden für kleine q durch.
4. Plotten Sie mit einem Programm Ihrer Wahl (Gnuplot, Mathematica, Matlab, etc) sowohl die Disperionsrelationen als auch deren Taylorentwicklung für eine Ga-As Kette mit einer Gitterkonstante von $a = 3,146$ nm und einem Verhältnis der Kraftkonstanten von $\beta_2 = 1,5\beta_1$.
5. Untersuchen Sie das Schwingungsverhalten der beiden Moden indem Sie das Amplitudenverhältnis des Exponentialansatzes betrachten. Wann spricht man von optischen, wann von akustischen Moden?
6. Überprüfen Sie Ihre Ergenisse am Grenzfall der einfachen linearen Kette ($m' = m'' = m$ und $\beta_1 = \beta_2 = \beta$). Plotten Sie auch dieses Ergebnis.
   [Bonus: Disukutieren Sie das Ergebnis des Grenzfalls.]

Aufgabe 4 (10 Punkte): *Quantisierung des Strahlungsfeldes*

Führen Sie ausgehend vom klassischen Hamiltonian des freien Strahlungsfeldes

$$H = \frac{1}{2}\int d^3r(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2)$$

die zweite Quantisierung durch.

1. Betrachten Sie dazu die Modenentwicklung des Vektorpotentials

   $$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t) = \sum_{\mathbf{k}}\sum_{\lambda}\left(f_{\mathbf{k}}\mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_{\mathbf{k}}t)}\hat{c}_{\lambda,\mathbf{k}} + \text{h.c.}\right).$$

   Dabei ist $\mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda}$ der Einheitsvektor in Polarisationsrichtung λ und $f_{\mathbf{k}}$ die Amplitude der $\mathbf{k}$-ten Mode des Feldes. Wie lassen sich das $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ Feld mit Hilfe dieser Entwicklung schreiben? Welche Dispersionsrelation ergibt sich? Begründen Sie, ob es sich um ein longitudinales oder transversales em Feld handelt.

2. Zeigen Sie, dass sich der Hamiltonian mit dem Ergebnis aus (1) wie folgt schreiben läßt:

   $$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}}\sum_{\lambda}\hbar\omega_{\mathbf{k}}\left(\hat{c}^\dagger_{\lambda,\mathbf{k}}\hat{c}_{\lambda,\mathbf{k}} + \frac{1}{2}\right).$$