Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

10. Juni 2009

Prof. Dr. A. Knorr
Dr. Ermin Malic,
Dipl.-Phys. Frank Milde

www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss09/wpfv/tfp/

8. Übungsblatt zur Theoretische Festkörperphysik

Abgabe: bis Dienstag 09.06.2009 10:15 Uhr in der Vorlesung.

Aufgabe 14 (5 Punkte): *BCS-Theorie des Supraleiters*

In der VL wurde der BSC Hamiltonian von Elektronen,die mittels Phononenaustausch attraktiv wechselwirken, hergeleitet:

$$\hat{H}_{BCS} = 2\sum_k E(k)\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - V\sum_{kk'} \hat{a}_{k'}^\dagger \hat{a}_{-k'}^\dagger \hat{a}_{-k}\hat{a}_k$$

Dabei gibt das Vorzeichen vor der Wellenzahl auch gleichzeitig den Spin ($\pm$) an. Ausgehend von einer gefüllten Fermikugel (neuer Vakuumzustand $|\phi_0\rangle$) wird ein neuer Grundzustand $|g\rangle$, der Cooperpaare enthält, konstruiert:

$$|g\rangle = \prod_k (u_k + v_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-k}^\dagger)|\phi_0\rangle.$$

Aus Normierung folgt $u_k^2 + v_k^2 = 1$. Durch die sogenannte Bogoljubov-Transformation

$$\hat{d}_k = u_k\hat{a}_k - v_k\hat{a}_{-k}^\dagger, \quad \hat{d}_{-k} = u_k\hat{a}_{-k} + v_k\hat{a}_k^\dagger$$
$$\hat{d}_k^\dagger = u_k\hat{a}_k^\dagger - v_k\hat{a}_{-k}, \quad \hat{d}_{-k}^\dagger = u_k\hat{a}_{-k}^\dagger + v_k\hat{a}_k$$

erhält man neue Teilchen, für die gilt: $\hat{d}_k|g\rangle = 0$ und $\hat{d}_{-k}|g\rangle = 0$

1. Zeigen Sie, dass die neuen Operatoren den Antikommutatorregeln von Fermioperatoren unterliegen: $\left[\hat{d}_k, d_{k'}^\dagger\right]_+ = \left[\hat{d}_{-k}, d_{-k'}^\dagger\right]_+ = \delta_{k,k'}$ und z.B. $\left[\hat{d}_k, \hat{d}_{-k'}^\dagger\right]_+ = 0$
2. Stellen Sie die Umkehrtransformation auf ($\hat{a}_{-k} = \dots$)
3. Transformieren Sie den Hamiltonian in die Form $\hat{H} = E_0 + E_1\hat{H}_1 + E_2\hat{H}_2 + E_3\hat{H}_3$, wobei E_0 keine Operatoren enthalten sollen, $\hat{H}_1$ nur $\hat{d}^\dagger\hat{d}$ Operatorpaare, H_2 die $\hat{d}^\dagger\hat{d}^\dagger$, $\hat{d}\ \hat{d}$ Paare und $\hat{H}_3$ die verbleibenden Viererterme, die vernachlässigt werden können.
4. Zeigen Sie: Variation von E_0 nach v_k liefert:
$$2\varepsilon(k)\frac{u_k v_k}{u_k^2 - v_k^2} = V\sum_{k'} u_{k'}v_{k'} \quad (=: \Delta)$$
TIPP: v_k ist verknüpft mit mit u_k, daher ist $\delta E_0 = \left(\frac{\delta E_0}{\delta v_k} - \frac{\delta E_0}{\delta u_k}\frac{v_k}{u_k}\right)\delta v_k = 0.$
5. Folgern Sie: $E_2 = 0$.
6. Zeigen Sie, dass $E_1 = \sum_k \sqrt{\varepsilon^2(k) + \Delta^2}$ gilt. Skizzieren Sie E_1 als Funktion von k und interpretieren Sie.

Bitte Rückseite beachten! ⟶

8. Übung TFP SS 09

Aufgabe 15 (5 Punkte): *Operatorrelation*
Zeigen Sie, dass für zwei Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ gilt:

$$e^{s(\hat{A}+\hat{B})} = e^{s\hat{A}} T_s \exp\left[\int_0^s \mathrm{d}s_1 e^{-s_1\hat{A}} \hat{B} e^{s_1\hat{A}}\right]$$

Nutzen Sie dazu die Analogie zu einen Hamiltonoperator $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{ww}$ mit freiem $\hat{H}_0$ $(= \hat{A})$ und Wechselwirkungsanteil $\hat{H}_{ww}$ $(= \hat{B})$: Führen Sie zunächst eine Ableitung von $\hat{X} = e^{s(\hat{A}+\hat{B})}$ nach dem Parameter s durch. Das führt zu einem Ausdruck, der in seiner Form der Schrödingergleichung für $\hat{X}$ ähnelt. Eine Transformation ins Dirac-Bild bezüglich der verallgemeinerten Zeit s, formale Lösung und anschliessende Rücktransfomration führen zum gewünschten Ergebnis.