Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik
19. Juni 2009

Prof. Dr. A. Knorr
Dr. Ermin Malic,
Dipl.-Phys. Frank Milde
www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss09/wpfv/tfp/

10. Übungsblatt zur Theoretische Festkörperphysik

Abgabe: bis Dienstag 07.07.2009 10:15 Uhr in der Vorlesung.

Aufgabe 16 (20 Punkte): *Plasmonen*
In dieser Aufgabe sollen die kollektiven Anregungen des Elektronengases untersucht werden. Dabei soll eine Gleichung zur Bestimmung der Dispersionsrelation $\omega_{Pl}(\mathbf{q})$ der neuen Quasiteilchen, Plasmonen genannt, gefunden werden.

(a) Wiederholen Sie zunächst, dass sich die Elektronendichte des homogenen Elektronengases ρ darstellen läßt als:

$$\rho^D(\mathbf{r},t) = -\frac{e}{V}\sum_{\mathbf{Q}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \rho^D_{\mathbf{Q}}(\omega)\, e^{-i\omega t - i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}} \qquad \text{mit} \qquad \rho^D_{\mathbf{Q}} = \sum_{\mathbf{k},s}\left\langle a^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q},s} a_{\mathbf{k},s}\right\rangle.$$

(b) Stellen Sie nun die *Heisenberg*-Bewegungsgleichung für $\left\langle a^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q},s} a_{\mathbf{k},s}\right\rangle$ auf. Nutzen Sie dazu den aus der VL bekannten Elektronengas-Hamiltonian:

$$\hat{H} = \underbrace{\sum_{\mathbf{k},s}\varepsilon_{\mathbf{k},s} a^\dagger_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{k},s}}_{\hat{H}_0} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{\substack{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}\\ s_1,s_2}} V_{\mathbf{q}} a^\dagger_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q},s_1} a^\dagger_{\mathbf{k}_2-\mathbf{q},s_2} a_{\mathbf{k}_2,s_2} a_{\mathbf{k}_1,s_1}}_{\hat{H}_{el-el}}.$$

Tipp: $\left[\hat{H}_{el-el}, a^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q},\lambda} a_{\mathbf{k},\lambda}\right] = \frac{1}{2}\sum_{\substack{\mathbf{k}_2,\mathbf{q}\\ s}} V_{\mathbf{q}}\left(a^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}+\mathbf{q},\lambda} a^\dagger_{\mathbf{k}_2-\mathbf{q},s} a_{\mathbf{k}_2,s} a_{\mathbf{k},\lambda} + a^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q},\lambda} a^\dagger_{\mathbf{k}_2-\mathbf{q},s} a_{\mathbf{k}-\mathbf{q},s} a_{\mathbf{k}_2,s}\right).$

(c) Um das auftretende Hierachieproblem (berechnete Erwartungswerte $\langle a^\dagger a\rangle$ koppeln an höhere Erwartungswerte $\langle a^\dagger a^\dagger a a\rangle$) zu lösen, führen Sie eine *Hartree-Fock*-Faktorisierung der 4er-Erwartungswerte durch.

(d) Vernachlässigen Sie zusätzlich Spinkohärenzen ($\delta_{s,\lambda}$) und nehmen Sie nur Erwartungswerte mit, die elektronische Dichten ($\rho^{ss}_{\mathbf{k},\mathbf{k}} := \left\langle a^\dagger_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{k},s}\right\rangle$) und deren räumliche Fluktuationen beschreiben ($\rho^{ss}_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}} := \left\langle a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q},s} a_{\mathbf{k},s}\right\rangle$). Damit erhält man folgende Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} -i\hbar\partial_t \rho^{ss}_{\mathbf{k}+\mathbf{Q},\mathbf{k}} &= \left(\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{Q},s} - \varepsilon_{\mathbf{k},s}\right)\rho^{ss}_{\mathbf{k}+\mathbf{Q},\mathbf{k}} + V_{\mathbf{Q}}\left(\rho^{ss}_{\mathbf{k},\mathbf{k}} - \rho^{ss}_{\mathbf{k}+\mathbf{Q},\mathbf{k}+\mathbf{Q}}\right)\sum_{\mathbf{k}_2,s'}\rho^{s's'}_{\mathbf{k}_2+\mathbf{Q},\mathbf{k}_2} \qquad (1)\\ &+ \sum_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}}\left(\rho^{ss}_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \rho^{ss}_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}+\mathbf{q},\mathbf{k}+\mathbf{Q}+\mathbf{q}}\right)\rho^{ss}_{\mathbf{k}+\mathbf{Q},\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

Deuten Sie die einzelnen Terme.

Bitte Rückseite beachten! ⟶

(e) In der VL wurde Gleichung (1) im Fourierraum analytisch gelöst:

$$1 = \frac{2V_{\mathbf{q}}}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}} \frac{f_{\mathbf{k+q}} - f_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathsf{Pl}}(\mathbf{q}) + \hbar^{-1}(\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k+q}} - \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}})}, \tag{2}$$

wobei es sich bei $\tilde{\epsilon}$ um die renormalisierte Einteilchenenergie handelt. Um sich dieses Ergebnis zu veranschaulichen, plotten Sie mit einem Programm Ihrer Wahl (Gnuplot, Mathematica, Mathlab, etc.) die rechte Seite der Bestimmungsgleichung (2) für einen beliebigen, aber festen Wert $\mathbf{q}$ in Abhängigkeit von ω_{Pl}. Nehmen Sie dazu den eindimensionalen Spezialfall an $(\mathbf{k} = k)$. Zusätzlich soll es sich im Nenner um die freien Teilchenenergien handeln $\tilde{\epsilon}_k = \epsilon_k$. Was bedeutet es also, die transzendente Gleichung (2) zu lösen und welche Lösung ist die kollektive Schwingungsmode?

Aufgabe 17 (10 Punkte): *Feynman-Graphen*

1. Zeigen Sie am Beispiel der Elektron-Phonon Wechselwirkung, dass in einer zeitgeordneten Störreihe das auftretende Wechselwirkungspotential in zweiter Ordnung zwischen Bosonen und Ferminonen in eine effektive Fermionische Wechselwirkung umgeschrieben werden kann.

2. Betrachten Sie die zweite Ordnung dieser effektiven Elektron-Elektron Störreihe. Wie sieht der zeitgeordnete Erwartungswert aus (siehe VL), welchen es auszuwerten gilt? In diagrammatischer Schreibweise ergeben sich 24 verschiedene mögliche Kombinationen der Elektron-Elektron-Interaktion. Zeichnen Sie diese.