Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

2. Juli 2009

Prof. Dr. A. Knorr
Dr. Ermin Malic,
Dipl.-Phys. Frank Milde

www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss09/wpfv/tfp/

12. Übungsblatt zur Theoretische Festkörperphysik

Abgabe: bis Dienstag 14.07.2009 10:15 Uhr in der Vorlesung.

Aufgabe 20 (10 Punkte): *Coulomb-Abschirmung in 2D*
In dieser Aufgabe sollen die Abschirmung des Coulomb-Potentials in einem 2D Elektronengas bestimmt werden.

1. Zeigen Sie, dass das chemische Potential μ im 2D folgende Form annimmt:

$$\mu = \frac{1}{\beta} \ln \left[\exp\left(\frac{\pi \beta \hbar^2 n}{m_e} \right) - 1 \right]$$

   Gehen Sie von der Teilchendichte $n = N/L^2$ aus und berechnen Sie die Teilchenzahl $N = \sum_{\mathbf{k}\sigma} f_{\mathbf{k}\sigma}$. Dazu muss die Summe in ein 2D Integral überführt werden.

2. Bestimmen Sie aus $V(\mathbf{r}) = e^2/(4\pi\varepsilon_0 r)$ das zweidimensionale Coulombmatrixelement $V_{\mathbf{q}}$.
   TIPP: $\int_0^\infty \mathrm{d}s J_0(s) = 1$

3. Zeigen Sie, dass die Dielektrische Funktion sich als

$$\varepsilon_q = 1 + \frac{\kappa}{q}$$

   darstellen lässt. Wie sieht die Abschirmlänge κ in zwei Dimensionen aus? Wie lautet damit das abgeschirmte 2D Coulombpotential?

   TIPP: *Werten Sie die Lindhardformel im statischen Grenzfall $\omega \to 0$ und mit den freien (nicht renormierten) Energien ε_k aus und bestimmen Sie die auftretende Ableitung $\partial_\mu N$ mit Hilfe der Ergebnisse aus (1).*

Bitte Rückseite beachten!⟶

12. Übung TFP SS 09

Aufgabe 21 (10 Punkte): *Feynman-Diagramme berechnen*
Nachdem in der letzten Übung die verschiedenen möglichen Kombinationen der Elektron-Elektron-Interaktion in zweiter Ordnung der Elektron-Elektron Störreihe mittels Diagrammen bestimmt wurden, soll nun ein Diagram zurückübersetzt und ausgewertet werden.

(a) Um die Korrelationsenergie auszurechnen, muss $\langle \hat{T} \exp \left[-\int_0^\beta \mathrm{d}\beta' H_w \right] \rangle$ in zweiter Ordnung betrachtet werden. Bei dem Potential handelt es sich um die Coulomb-Wechselwirkung $H_w = -\frac{1}{2} \sum_{klmn} V_{kl}^{nm} \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_k \hat{a}_l$. Zeigen Sie, dass das Diagramm D in Abb. 1 mit Hilfe der "Übersetzungsregeln" aus der VL für $T \neq 0$ als

$$-\partial_\beta D = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{qkl}} \frac{V_{\mathbf{q}}^2}{\varepsilon_{\mathbf{q+l}} - \varepsilon_{\mathbf{l}} - \varepsilon_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{q-k}}} f_{\mathbf{q+l}} (1 - f_{\mathbf{l}})(1 - f_{\mathbf{k}}) f_{\mathbf{q-k}}$$

geschrieben werden kann. Folgendes Vorgehen führt zum Ziel

1. Schreiben Sie das Diagramm wie in der VL gezeigt mittels Greensfunktionen G und $G^\dagger$.
2. Führen Sie eine neue Integrationsvariable $\overline{\beta} = \beta_1 - \beta_2$ ein und integrieren Sie.
3. Schreiben Sie das Coulombmatrixelement V_{kl}^{nm} um in dem Sie die Ergebnisse von Zettel 9 nutzen (gibt mehr δs).

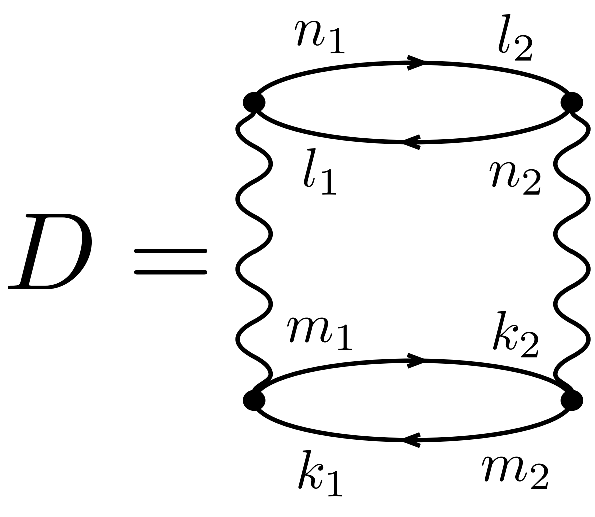

Abbildung 1: Ein wichtiges Diagramm D zur Berechnung der Korrelationsenergie des Elektronengases.