Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. v. Borzeszkowski
Dr. T. Chrobok
A. Carmele

5. Mai 2010

4. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie I

Abgabe: Donnerstag 20.05.2010 vor der Übung

Aufgabe 1 (10 Punkte): *Maxwellsche Gleichungen in 4-er Schreibweise*

a) Zeigen Sie, dass die 4-er Schreibweise der Maxwellschen Gleichungen:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\beta \tag{1}$$

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\partial^\beta F^{\gamma\delta} = 0 \tag{2}$$

mit

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

und $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$ für Gleichung (1) den Maxwellschen Gleichungen

$$div\mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \text{und} \quad rot\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

und für Gleichung (2)

$$div\mathbf{B} = 0 \quad \text{und} \quad rot\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

entspricht. Dabei bezeichnet $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ das Levi-Civita-Symbol mit den Eigenschaften:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} 1 \text{ falls } \alpha\beta\gamma\delta \text{ gerade Permutation von } (0,1,2,3) \\ -1 \text{ falls } \alpha\beta\gamma\delta \text{ ungerade Permutation von } (0,1,2,3) \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} . \tag{3}$$

b) Zeigen Sie, dass die Gleichungen (1,2) durch den Ansatz: $F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$ und die Verwendung der Lorenzeichung $\partial_\alpha A^\alpha = 0$ in die Form: $\Box A^\alpha = \frac{4\pi}{c} j^\alpha$ gebracht werden können.

c) Geben Sie explizit $F_{\alpha\beta}$ an.

d) Wie in der Übung gezeigt, kann aus den Maxwellschen Gleichungen der Energie-Impulstensor

$$T^\beta{}_\gamma = \frac{c}{4\pi}\left(F^{\alpha\beta}F_{\gamma\alpha} + \frac{1}{4}\delta^\beta{}_\gamma F^{\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda}\right) \tag{4}$$

gebildet werden. Bestimmen Sie explizit die $T^0{}_0$- und die $T^k{}_0$-Komponente ($k = 1, ..., 3$) des Tensors und identifizieren Sie diese Größen mit bekannten Größen aus der Elektrodynamik.