Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. v. Borzeszkowski
Dr. T. Chrobok
A. Carmele

12. Mai 2010

5. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Abgabe: Donnerstag 27.05.2010 vor der Übung

Aufgabe 1 (5 Punkte): *Feldbahndrehimpuls*

Der elektromagnetische Feldstärke-Tensor, der in der geometrischen Optik benutzt wird, lautet: $F_{\alpha\beta} = \lambda\,(A_\beta k_\alpha - A_\alpha k_\beta)$, wobei k_α ein lichtartiger Vektor ist, und der Eigenschaft $k_\alpha A^\alpha = 0$ genügt und λ eine Konstante ist. Durch den Ansatz bedingt ist k_α ein Gradientenfeld.

(a) Bestimmen Sie den Energie-Impuls-Tensor für den obigen Felstärke-Tensor:

$$T^\beta{}_\gamma = \frac{c}{4\pi}\left(F^{\alpha\beta}F_{\gamma\alpha} + \frac{1}{4}\delta^\beta{}_\gamma F^{\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda}\right) \tag{1}$$

im Fall, dass der Betrag des Vierer-Potentials A_α auf 1 normiert ist.

(b) Bilden Sie den Bahndrehimpuls-Tensor $M^{\alpha\beta\gamma}$ dieses Feldes über

$$M^{\alpha\beta\gamma} := T^{\alpha[\beta}x^{\gamma]}, \tag{2}$$

und bestimmen Sie die Bahndrehimpulsbilanz $M^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\gamma} = 0$, wenn $k^\alpha_{,\alpha} = 0$ gilt.

Aufgabe 2 (5 Punkte): *Energie-Impuls-Bilanz eines idealen Fluids in der Speziellen Relativitätstheorie*

Der Energie-Impuls-Tensor eines idealen Fluids ist definiert durch

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + \frac{p}{c^2})u^\alpha u^\beta - p\eta^{\alpha\beta},$$

wobei ρ die Massendichte, p der Druck und u^α das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit ist (in der Vorlesung eingeführt).

(i) Leiten Sie die Energie-Impuls-Bilanz

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = (\dot\rho + \frac{\dot p}{c^2})u^\alpha + (\rho + \frac{p}{c^2})(\dot u^\alpha + \Theta u^\alpha) - p^{,\alpha} = 0$$

(kräftefreier Fall) für diesen Tensor ab. Darin bezeichnen $\dot a^\beta = \frac{da^\beta}{d\tau}$ die Eigenzeitableitung und $\Theta := u^\alpha_{,\alpha}$ die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes. Geben Sie Θ explizit an.

(ii) Beweisen Sie, dass die Nullkomponente dieser Gleichung im nichtrelativistischen Grenzfall in die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \partial_i(\rho v^i) = 0 \tag{3}$$

übergeht. Vernachlässigen Sie dazu alle Terme $O(c^{-1})$ sowie $\dot u^\alpha$, benutzen Sie die Zerlegungen für $(u^\alpha) = \gamma(c, v^i)$ und beachten Sie, dass $\gamma \cong 1$ gilt.