

6. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie I

Abgabe: Dienstag 03.06.2010 vor der Übung

Aufgabe 1 (6 Punkte): Rotierendes Bezugssystem

Betrachten Sie die Koordinatentransformation

$$x^0 = x'^0 \quad x^1 = x'^1 \cos(x'^2 + \omega x'^0) \quad x^2 = x'^1 \sin(x'^2 + \omega x'^0) \quad (1)$$

die den Übergang in ein Nichtinertialsystem im Minkowski Raum beschreibt (ω ist eine Konstante und die Lichtgeschwindigkeit ist 1 gesetzt worden). Die dritte Raumkoordinate ist weggelassen worden.

a) Bestimmen Sie den metrischen Tensor

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} \eta_{\rho\kappa}$$

für die durch die Transformation (1) implizierten Koordinaten, wobei gilt $\eta_{\rho\kappa} = \text{diag}(1, -1, -1)$.

b) Geben Sie den kontravarianten metrischen Tensor, welcher über $g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$ definiert ist, an.

c) Berechnen Sie alle Christoffelsymbole

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (g_{\beta\rho,\gamma} + g_{\rho\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\rho})$$

für diese Koordinaten. Nutzen Sie, daß die Metrik symmetrisch ist.

d) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung (Geodätengleichung)

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} = 0 \quad (2)$$

in diesen Koordinaten und identifizieren Sie die Kräfte.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Transformationsverhalten der Christoffelsymbole

Zeigen Sie, dass für die Transformation der Christoffelsymbole folgende Beziehung gilt

$$\Gamma_{l'k'}^{m'} = \Gamma_{rs}^n A_n^{m'} A_{l'}^r A_{k'}^s - A_{n,l}^{m'} A_{l'}^n A_{k'}^l.$$

Die $A_n^{m'} = \frac{\partial x'^{m'}}{\partial x^n}$ bezeichnen die Transformationen und A_n^m die entsprechenden Inversen.

Benutzen Sie dazu die Transformationsvorschrift $\frac{dx^{m'}}{d\lambda} = A_n^{m'} \frac{dx^n}{d\lambda}$ und beachten Sie, dass die Geodätengleichung (2) in jedem Koordinatensystem die gleiche Form besitzt. Welche Eigenschaft der Transformation zerstört den Tensorcharakter des Christoffelsymbols?