

7. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Abgabe: Donnerstag, 10.06.2010 vor der Übung

Aufgabe 1 (2 Punkte): *Lemma von Ricci*

Beweisen Sie die kovariante Konstanz der Metrik

$$g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$$

für den Riemannschen Raum.

Aufgabe 2 (1 Punkte): *Paralleltransport*

Zeigen Sie, dass der Tangentenvektor $t^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$ an eine Geodäte einem Paralleltransport unterliegt.

Aufgabe 3 (3 Punkte): *Identitäten:*

Zeigen Sie folgende Identitäten:

$$g_{\alpha\beta;\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\alpha\gamma} \quad (1)$$

$$g_{\alpha\mu} g^{\mu\beta}_{;\gamma} = -g_{\alpha\mu;\gamma} g^{\mu\beta} \quad (2)$$

$$g^{\alpha\beta}_{;\gamma} = -\Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma} g^{\mu\beta} - \Gamma^{\beta}_{\mu\gamma} g^{\mu\alpha}. \quad (3)$$

Aufgabe 2 (4 Punkte): *Vertauschbarkeit der zweiten kovarianten Ableitung*

Berechnen Sie den Ausdruck

$$A_{\alpha;[\beta;\gamma]}$$

und vereinfachen Sie diesen soweit wie möglich. Welches Objekt erhält man? Geben Sie das Ergebnis in Abhängigkeit von den Christoffel-Symbolen und zusätzlich noch in Abhängigkeit von der Metrik an.