Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. v. Borzeszkowski
Dr. T. Chrobok
A. Carmele

10. Juni 2010

9. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie I

Abgabe: Donnerstag, 24.06.2010 vor der Übung

Aufgabe 1 (1 Punkte): *Symmetrie des Ricci-Tensors*

Zeige die Symmetrie des Ricci-Tensors:

$$R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}. \tag{1}$$

Aufgabe 2 (2 Punkte): *Schurs Theorem*

Falls die Krümmung eines Riemannschen Raumes isotrop ist, kann der Krümmungstensor geschrieben werden als:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = K\ (g_{\alpha\gamma}\ g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}\ g_{\beta\gamma}). \tag{2}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Bianchi-Identitäten, daß K eine Konstante sein muß.

Aufgabe 3 (7 Punkte): *Weyl-Tensor*

Analog zur Zerlegung eines symmetrischen Tensors kann der Krümmungstensor in den Weyl-Tensor (oder konformen Krümmungstensor) und Teile, in die Ricci-Tensor und Krümmungsskalar eingehen, zerlegt werden. Der Weyl-Tensor C_{abcd} ist wie folgt definiert:

$$C^{ab}{}_{cd} = R^{ab}{}_{cd} - 2g^{[a}{}_{[c}R^{b]}{}_{d]} + \frac{R}{3} g^{a}{}_{[c} g^{b}{}_{d]}. \tag{3}$$

(i) Zeigen Sie, dass der Tensor spurfrei ist, d.h. $C^{ab}{}_{ad} = 0$ gilt.
(ii) Zeigen Sie, daß der Weyl-Tensor die Symmetrie-Eigenschaften des Krümmungstensors erbt: $C_{abcd} = C_{cdab}$, $C_{abcd} = -C_{bacd}$ und $C_{a[bcd]} = 0$.
(iii) Zeigen Sie, daß ein Riemannscher Raum mit isotroper Krümmung und Dimension $n \geq 4$ konform flach ist. Nutzen Sie die Äquivalenz: Ein Riemannscher Raum ist genau dann konform flach, wenn der Weyl-Tensor verschwindet.