

Prof. Dr. Harald Engel,
 Dipl. Phys. Stefan Fruhner, Dipl. Ing. Maximilian Schmitt,
 Maria Richter, Bruno Riemenschneider, Eike Verdenhalven

4. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Abgabe: Do. 20.05.2010 bis 8:30 Uhr VOR der Vorlesung in den Briefkasten im ER Gebäude oder online über ISIS

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie alle Namen und Matrikelnummern an. Vermerken Sie bitte nur den Namen des Tutors, bei dem das korrigierte Übungsblatt zurückgegeben werden soll. Wenn Aufgaben mit Hilfe des Computers gelöst werden, dann ist der komplette Quelltext der Abgabe kommentiert beizufügen.

Aufgabe 11 (6 Punkte): Drehmatrizen – Drehachse und Winkel

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass sich die Drehmatrix $\underline{\underline{D}}$ bei einer Drehung um eine Drehachse in Richtung \underline{e} um den Winkel φ folgendermaßen darstellen lässt:

$$\underline{\underline{D}} = \cos(\varphi)\underline{\underline{1}} + [\underline{\underline{1}} - \cos(\varphi)]\underline{e} \circ \underline{e} - \sin(\varphi)\underline{e} \times .$$

- (a) Bestimmen Sie die Komponenten von $\underline{\underline{D}}$ unter Verwendung des Einheitsvektors $\underline{e} = (u, v, w)^T$ in Richtung der Drehachse.

Hinweis: In Komponentenschreibweise werden komplizierte Ausdrücke einfach. Formulieren Sie deshalb den obigen Ausdruck entsprechend. Beachten Sie die Darstellung des Kreuzproduktes als $(\underline{a} \times \underline{b})_i = \epsilon_{ijk}a_jb_k = \Omega_{ik}b_k$. Wie lautet Ω_{ik} ?

Sie sollten zu folgendem Ergebnis kommen:

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) + (1 - \cos(\varphi))u^2 & (1 - \cos(\varphi))uv + w \sin(\varphi) & (1 - \cos(\varphi))uw - v \sin(\varphi) \\ (1 - \cos(\varphi))uv - w \sin(\varphi) & \cos(\varphi) + (1 - \cos(\varphi))v^2 & (1 - \cos(\varphi))vw + u \sin(\varphi) \\ (1 - \cos(\varphi))uw + v \sin(\varphi) & (1 - \cos(\varphi))vw - u \sin(\varphi) & \cos(\varphi) + (1 - \cos(\varphi))w^2 \end{pmatrix}$$

- (b) Betrachten Sie den Spezialfall, dass \underline{e} in Richtung der x-Achse zeigt. Überprüfen Sie die Relationen $\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{D}}^T = \underline{\underline{1}}$, $\text{Det}(\underline{\underline{D}}) = 1$ und $\text{Sp}(\underline{\underline{D}}) = 1 + 2 \cos(\varphi)$, die für jede Drehmatrix erfüllt sein müssen.

Hinweis:

Sie erhalten 5 Bonuspunkte, wenn Sie diese Relationen für ein allgemeines $\underline{e} = (u, v, w)^T$ zeigen. Wenn Sie sich mit Matrizenoperationen sicher genug fühlen, dann können Sie auch *Mathematica* zur Lösung verwenden. Entsprechende Hinweise zum Umgang mit diesem Computeralgebraprogramm geben die Tutorien. Achten Sie darauf den kompletten Quelltext abzugeben und kommentieren Sie Ihr Vorgehen.

- (c) Zeigen Sie für den Spezialfall $\underline{e} = (1, 0, 0)^T$, dass $\underline{\underline{D}}$ den Eigenvektor \underline{e} zum Eigenwert 1 besitzt.

Aufgabe 12 (14 Punkte): Leitfähigkeitstensor

Die Stromdichte in einem Metall wird beschrieben durch das Ohmsche Gesetz:

$$\underline{j} = \underline{\underline{\sigma}} \underline{E} .$$

Dabei ist $\underline{\underline{\sigma}}$ der Leitfähigkeitstensor und das elektrische Feld \underline{E} . Man beobachtet die Stromdichte $\underline{j} = j_0(14, 12, 0)^T$, wenn im Inneren das elektrische Feld $\underline{E} = E_0(1, 0, 0)^T$ herrscht. Bei angelegtem Feld in y-Richtung $\underline{E} = E_0(0, 1, 0)^T$ ergibt sich $\underline{j} = j_0(12, 21, 0)^T$ und ferner $\underline{j} = j_0(0, 0, 5)^T$ zu $\underline{E} = E_0(0, 0, 1)^T$.

Bitte Rückseite beachten! →

4. Übung MM SS 10

- (a) Geben Sie den dimensionslosen Leitfähigkeitstensor $\underline{\underline{H}}$ an, der durch $\underline{\underline{\sigma}} := \sigma_0 \underline{\underline{H}}$ mit $\sigma_0 = \frac{j_0}{E_0}$ definiert wird.
- (b) Um ein besseres Koordinatensystem zu finden, betrachten wir eine Drehung um die z -Achse (mit zunächst beliebigem Winkel φ). Berechnen Sie den dimensionslosen Leitfähigkeitstensor nach der Drehung $\underline{\underline{H}}'$.
- (c) Der Winkel φ läßt sich nun so festlegen, dass die Nicht-Diagonal-Elemente von $\underline{\underline{H}}'$ verschwinden. Geben Sie die möglichen Lösungen für φ an.
- (d) Welche Diagonalelemente hat dann $\underline{\underline{H}}'$?
- (e) Geben Sie die Drehmatrix $\underline{\underline{D}}$ konkret an. Überprüfen Sie rechnerisch, ob die Zeilen von $\underline{\underline{D}}$ Eigenvektoren zu $\underline{\underline{H}}$ sind ? Geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an.
- (f) In welche Richtung \underline{e} (*Hauptachse*) muss man also das elektrische Feld $\underline{E} = E_0 \underline{e}$ legen, damit die Stromdichte maximal wird. Wie lautet $|j_{max}|$?

Vorlesung:	<ul style="list-style-type: none"> Donnerstags 8:15 Uhr – 9:45 Uhr in EW 201. 																																			
	Mo 10–12 Uhr EW 731 Stefan, Max																																			
	Mo 12–14 Uhr EW 731 Stefan, Max																																			
	Mo 12–14 Uhr FR 0512A Bruno																																			
Tutorien:	Mo 14–16 Uhr EW 202 Eike																																			
	Mo 16–18 Uhr EW 229 Eike																																			
	Di 08–10 Uhr EW 731 Bruno																																			
	Di 12–14 Uhr EW 731 Maria																																			
	Di 16–18 Uhr EW 226 Maria																																			
Klausur:	<ul style="list-style-type: none"> Donnerstag, den 08.07.2010, von 08:00 – 10:00 Uhr in H 1058. 																																			
Scheinkriterien:	<ul style="list-style-type: none"> Mindestens 50% der Übungspunkte. Bestandene Klausur. Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien. 																																			
Literatur zur Lehrveranstaltung:	<ul style="list-style-type: none"> Siegfried Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik Rainer Wüst: Mathematik für Physiker und Mathematiker 1 und 2 Mathematische Einführungskapitel der Lehrbuchreihen der theoret. Physik, z.B. Greiner, Nolting Bronstein: Taschenbuch der Mathematik Hermann Schulz: Physik mit Bleistift : das analytische Handwerkszeug der Naturwissenschaftler Richard Feynman: Vorlesungen über Physik 																																			
Sprechzeiten:	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Name</th> <th>Tag</th> <th>Zeit</th> <th>Raum</th> <th>Tel.</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Prof. Dr. H. Engel</td> <td>Mi.</td> <td>14:30-16:00</td> <td>EW 738</td> <td>79462</td> </tr> <tr> <td>Stefan Fruhner</td> <td>Fr.</td> <td>13:30-14:30</td> <td>EW 627/28</td> <td>27681</td> </tr> <tr> <td>Max Schmitt</td> <td>Do.</td> <td>10:00-11:00</td> <td>EW 708</td> <td>25225</td> </tr> <tr> <td>Maria Richter</td> <td>Di.</td> <td>15:00-16:00</td> <td>EW 217</td> <td>26143</td> </tr> <tr> <td>Bruno Riemenschneider</td> <td>Mi.</td> <td>15:00-16:00</td> <td>EW 217</td> <td>26143</td> </tr> <tr> <td>Eike Verdenhalven</td> <td>Di.</td> <td>13:00-14:00</td> <td>EW 217</td> <td>26143</td> </tr> </tbody> </table>	Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.	Prof. Dr. H. Engel	Mi.	14:30-16:00	EW 738	79462	Stefan Fruhner	Fr.	13:30-14:30	EW 627/28	27681	Max Schmitt	Do.	10:00-11:00	EW 708	25225	Maria Richter	Di.	15:00-16:00	EW 217	26143	Bruno Riemenschneider	Mi.	15:00-16:00	EW 217	26143	Eike Verdenhalven	Di.	13:00-14:00	EW 217	26143
Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.																																
Prof. Dr. H. Engel	Mi.	14:30-16:00	EW 738	79462																																
Stefan Fruhner	Fr.	13:30-14:30	EW 627/28	27681																																
Max Schmitt	Do.	10:00-11:00	EW 708	25225																																
Maria Richter	Di.	15:00-16:00	EW 217	26143																																
Bruno Riemenschneider	Mi.	15:00-16:00	EW 217	26143																																
Eike Verdenhalven	Di.	13:00-14:00	EW 217	26143																																