

Prof. Dr. Harald Engel,  
 Dipl. Phys. Stefan Fruhner, Dipl. Ing. Maximilian Schmitt,  
 Maria Richter, Bruno Riemenschneider, Eike Verdenhalven

## 7. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

**Abgabe: Do. 10.06.2010 bis 8:30 Uhr VOR der Vorlesung in den Briefkasten im ER Gebäude oder online über ISIS**

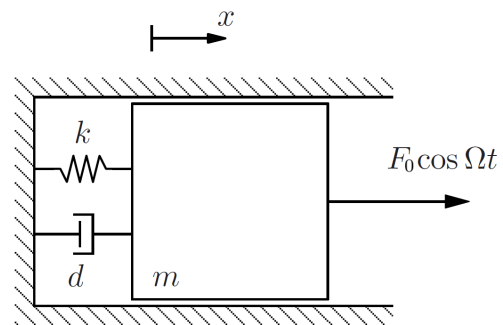
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie alle Namen und Matrikelnummern an. Vermerken Sie bitte nur den Namen des Tutors, bei dem das korrigierte Übungsblatt zurückgegeben werden soll. Wenn Aufgaben mit Hilfe des Computers gelöst werden, dann ist der komplette Quelltext der Abgabe kommentiert beizufügen.

### Aufgabe 18 (12 Punkte): Erzwungene Schwingungen mit Dämpfung

Gegeben sei ein gedämpfter Einmassenschwinger, der mit einer periodischen Kraft  $F(t) = F_0 \cos \Omega t$  angetrieben wird. Die Bewegungsgleichung für die Auslenkung  $x(t)$  ist gegeben durch

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t,$$

mit  $\delta = \frac{d}{2m}$  und  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ .



- Lösen Sie die **homogene Gleichung** zur Bewegungsgleichung. (*Hinweis:* Verwenden Sie den Ansatz  $x(t) = C e^{\lambda t}$ .)
- Zeigen Sie, dass sich für den Fall schwacher Dämpfung, sprich  $\delta^2 < \omega_0^2$ , die Lösung in der Form  $x(t) = e^{-\delta t} (A \cos \omega_* t + B \sin \omega_* t)$  schreiben lässt und geben Sie  $\omega_*$  an.
- Verwenden Sie die Anfangsbedingungen  $x(t=0) = 0$  und  $\dot{x}(t=0) = v_0$ , um die Konstanten  $A$  und  $B$  zu eliminieren und zeichnen Sie qualitativ  $x(t)$ .
- Nun lösen Sie die **inhomogene Gleichung**. Das lässt sich am elegantesten im Komplexen machen. Dazu interpretieren Sie  $F(t)$  als Realteil einer komplexen Kraft:  $F(t) = \text{Re}(\tilde{F}(t))$ , und  $x(t)$  als Realteil einer komplexen Lösung:  $x(t) = \text{Re}(\tilde{x}(t))$ . Im Komplexen lautet die inhomogene Gleichung dann:

$$\ddot{\tilde{x}} + 2\delta\dot{\tilde{x}} + \omega_0^2 \tilde{x} = \frac{\tilde{F}}{m}.$$

Setzen Sie darin  $\tilde{F} = F_0 e^{i\Omega t}$  und  $\tilde{x} = x_0 e^{i\Omega t}$  ein und bestimmen Sie die Konstante  $x_0$ . Anschließend geben Sie  $x(t)$  an. (*Hinweis:* Stellen Sie die komplexe Amplitude  $x_0$  zuerst in polarer Form dar:  $x_0 = \rho e^{i\Theta}$ . Zeigen Sie dann, dass Sie damit eine Gleichung der Form  $x(t) = \rho \cos(\Omega t + \Theta)$  erhalten und geben Sie  $\rho$  und  $\Theta$  an.)

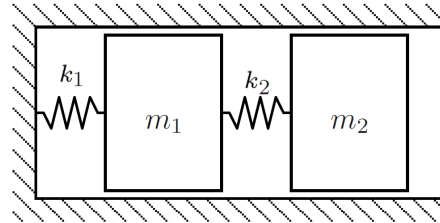
- Geben Sie die **vollständige Lösung** an. Plotten (z.B. mit Mathematica) und diskutieren Sie  $x(t)$  für eine schwache Dämpfung mit den Zahlenwerten  $\delta = 0.5$  und  $\omega_0 = 20$ . Das System soll angetrieben werden mit einer Kreisfrequenz  $\Omega = 1$ . Setzen Sie weiterhin  $v_0 = 20$  und  $\rho = 1$ . Wählen Sie einen sinnvollen Zeitbereich, etwa  $0 \leq t \leq 10$ .

7. Übung MM SS 10

**Aufgabe 19 (8 Punkte): Gekoppelte Schwingungen**

Skizziert ist ein System aus zwei schwingenden Massen. Die Bewegungsgleichungen für die Auslenkungen  $x_1$  und  $x_2$  sind gegeben durch

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2, \\ m_2 \ddot{x}_2 &= k_2 x_1 - k_2 x_2. \end{aligned}$$



Dies ist ein gekoppeltes System linearer homogener Differentialgleichungen.

- (a) Schreiben Sie das Differentialgleichungssystem in Matrixform  $\ddot{\underline{x}} = \underline{\underline{M}} \underline{x}$  mit  $\underline{x} = (x_1, x_2)^T$ . Verwenden Sie  $k_1 = 2k, k_2 = k, m_1 = 2m, m_2 = m$ .
- (b) Zeigen Sie, dass Sie mit dem Ansatz  $\underline{x} = \underline{c}e^{\lambda t}$  ein Eigenwertproblem erhalten und berechnen Sie die Eigenwerte (Eigenfrequenzen) und Eigenvektoren der Matrix  $\underline{\underline{M}}$ . Interpretieren Sie die beiden Eigenschwingungen physikalisch. Geben Sie den Lösungsvektor  $\underline{x}(t)$  an.

<b>Vorlesung:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Donnerstags 8:15 Uhr – 9:45 Uhr in EW 201.</li> </ul>																																			
	<table border="0"> <tr><td>Mo</td><td>10–12 Uhr</td><td>EW 731</td><td>Stefan, Max</td></tr> <tr><td>Mo</td><td>12–14 Uhr</td><td>EW 731</td><td>Stefan, Max</td></tr> <tr><td>Mo</td><td>12–14 Uhr</td><td>FR 0512A</td><td>Bruno</td></tr> <tr><td>Mo</td><td>14–16 Uhr</td><td>EW 202</td><td>Eike</td></tr> <tr><td>Mo</td><td>16–18 Uhr</td><td>EW 229</td><td>Eike</td></tr> <tr><td>Di</td><td>08–10 Uhr</td><td>EW 731</td><td>Bruno</td></tr> <tr><td>Di</td><td>12–14 Uhr</td><td>EW 731</td><td>Maria</td></tr> <tr><td>Di</td><td>16–18 Uhr</td><td>EW 226</td><td>Maria</td></tr> </table>	Mo	10–12 Uhr	EW 731	Stefan, Max	Mo	12–14 Uhr	EW 731	Stefan, Max	Mo	12–14 Uhr	FR 0512A	Bruno	Mo	14–16 Uhr	EW 202	Eike	Mo	16–18 Uhr	EW 229	Eike	Di	08–10 Uhr	EW 731	Bruno	Di	12–14 Uhr	EW 731	Maria	Di	16–18 Uhr	EW 226	Maria			
Mo	10–12 Uhr	EW 731	Stefan, Max																																	
Mo	12–14 Uhr	EW 731	Stefan, Max																																	
Mo	12–14 Uhr	FR 0512A	Bruno																																	
Mo	14–16 Uhr	EW 202	Eike																																	
Mo	16–18 Uhr	EW 229	Eike																																	
Di	08–10 Uhr	EW 731	Bruno																																	
Di	12–14 Uhr	EW 731	Maria																																	
Di	16–18 Uhr	EW 226	Maria																																	
<b>Tutorien:</b>																																				
<b>Klausur:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Donnerstag, den 08.07.2010, von 08:00 – 10:00 Uhr in H 1058.</li> </ul>																																			
<b>Scheinkriterien:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Mindestens 50% der Übungspunkte.</li> <li>Bestandene Klausur.</li> <li>Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.</li> </ul>																																			
<b>Literatur zur Lehrveranstaltung:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Siegfried Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik</li> <li>Rainer Wüst: Mathematik für Physiker und Mathematiker 1 und 2</li> <li>Mathematische Einführungskapitel der Lehrbuchreihen der theoret. Physik, z.B. Greiner, Nolting</li> <li>Bronstein: Taschenbuch der Mathematik</li> <li>Hermann Schulz: Physik mit Bleistift : das analytische Handwerkszeug der Naturwissenschaftler</li> <li>Richard Feynman: Vorlesungen über Physik</li> </ul>																																			
<b>Sprechzeiten:</b>	<table border="0"> <thead> <tr> <th>Name</th> <th>Tag</th> <th>Zeit</th> <th>Raum</th> <th>Tel.</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Prof. Dr. H. Engel</td> <td>Mi.</td> <td>14:30-16:00</td> <td>EW 738</td> <td>79462</td> </tr> <tr> <td>Stefan Fruhner</td> <td>Fr.</td> <td>13:30-14:30</td> <td>EW 627/28</td> <td>27681</td> </tr> <tr> <td>Max Schmitt</td> <td>Do.</td> <td>10:00-11:00</td> <td>EW 708</td> <td>25225</td> </tr> <tr> <td>Maria Richter</td> <td>Di.</td> <td>15:00-16:00</td> <td>EW 217</td> <td>26143</td> </tr> <tr> <td>Bruno Riemenschneider</td> <td>Mi.</td> <td>15:00-16:00</td> <td>EW 217</td> <td>26143</td> </tr> <tr> <td>Eike Verdenhalven</td> <td>Di.</td> <td>13:00-14:00</td> <td>EW 217</td> <td>26143</td> </tr> </tbody> </table>	Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.	Prof. Dr. H. Engel	Mi.	14:30-16:00	EW 738	79462	Stefan Fruhner	Fr.	13:30-14:30	EW 627/28	27681	Max Schmitt	Do.	10:00-11:00	EW 708	25225	Maria Richter	Di.	15:00-16:00	EW 217	26143	Bruno Riemenschneider	Mi.	15:00-16:00	EW 217	26143	Eike Verdenhalven	Di.	13:00-14:00	EW 217	26143
Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.																																
Prof. Dr. H. Engel	Mi.	14:30-16:00	EW 738	79462																																
Stefan Fruhner	Fr.	13:30-14:30	EW 627/28	27681																																
Max Schmitt	Do.	10:00-11:00	EW 708	25225																																
Maria Richter	Di.	15:00-16:00	EW 217	26143																																
Bruno Riemenschneider	Mi.	15:00-16:00	EW 217	26143																																
Eike Verdenhalven	Di.	13:00-14:00	EW 217	26143																																