

Prof. Dr. Harald Engel,
 Dipl. Phys. Stefan Fruhner, Dipl. Ing. Maximilian Schmitt,
 Maria Richter, Bruno Riemenschneider, Eike Verdenhalven

8. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Abgabe: Do. 17.06.2010 bis 8:30 Uhr VOR der Vorlesung in den Briefkasten im ER Gebäude oder online über ISIS

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie alle Namen und Matrikelnummern an. Vermerken Sie bitte nur den Namen des Tutors, bei dem das korrigierte Übungsblatt zurückgegeben werden soll. Wenn Aufgaben mit Hilfe des Computers gelöst werden, dann ist der komplette Quelltext der Abgabe kommentiert beizufügen.

Aufgabe 20 (10 Punkte): Nabla-Operator

Es sei \underline{r} ein Vektor mit Betrag r . Und es sei \underline{a} ein konstanter Vektor, der also nicht von \underline{r} abhängen möge. Die Komponenten von \underline{r} und \underline{a} seien mit r_μ bzw. a_μ bezeichnet ($\mu \in \{1, 2, 3\}$).

- (a) Berechnen Sie die folgende Divergenz (eines Vektorfeldes \underline{a})

$$\operatorname{div}(r\underline{a}) \left[\equiv \underline{\nabla} \cdot (r\underline{a}) \equiv \nabla_\mu (ra_\mu) \equiv \frac{\partial}{\partial r_\mu} (ra_\mu) \right].$$

- (b) Berechnen Sie die folgende Rotation (eines Vektorfeldes)

$$\underline{\nabla} \times \left(\frac{1}{2} \underline{a} \times \underline{r} \right) \left[\equiv \operatorname{rot} \left(\frac{1}{2} \underline{a} \times \underline{r} \right) \right].$$

- (c) Berechnen Sie den folgenden Gradienten (eines skalaren Feldes)

$$\underline{\nabla} \frac{1}{r} \left[\equiv \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right].$$

- (d) Die Vektoren \underline{b} und \underline{c} seien abhängig von r . Berechnen Sie das doppelte Kreuzprodukt

$$\underline{b} \times (\underline{\nabla} \times \underline{c}) \left[\equiv \underline{b} \times \operatorname{rot} \underline{c} \right].$$

- (e) Berechnen Sie weiterhin

$$\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{c}) \left[\equiv \operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{c} \right].$$

- (f) Berechnen Sie die Divergenz

$$\underline{\nabla} \cdot \frac{\underline{r}}{r} \left[\equiv \operatorname{div} \frac{\underline{r}}{r} \right].$$

Die Identitäten spiegeln – zur Erläuterung – die Definition des Nabla-Operators ($\underline{\nabla}$) sowie der Divergenz (div), des Gradienten (grad) und der Rotation (rot) wider.

Aufgabe 21 (10 Punkte): Gravitation

Gegeben sei die Gravitationskraft

$$\underline{F}_G(r) = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\underline{r}}{r},$$

mit den Massen m und M , der Gravitationskonstanten γ , dem Ortsvektor $\underline{r} = (x, y, z)^T$ und seinem Betrag $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Bitte Rückseite beachten! →

8. Übung MM SS 10

- (a) Zeigen Sie, dass dieses Kraftfeld ein Gradientenfeld ist. Da Gradientenfelder wirbelfrei sind, muss die Rotation verschwinden, d.h.

$$\underline{\nabla} \times \underline{F}_G(r) = 0.$$

- (b) Berechnen Sie das Potenzial $U(r)$ aus dem Linienintegral

$$U(r) = - \int_C \underline{F}_G(r) \cdot d\underline{r}.$$

Wählen Sie dazu einen geeigneten Integrationsweg C und verwenden Sie, um Integrale des Typs $\int_{x_a}^{x_e} \frac{x}{(x^2+c)^{3/2}} dx$ zu lösen, die Substitution $u = \sqrt{x^2+c}$.

- (c) Die Kraft lässt sich natürlich auch durch Gradientenbildung aus dem Potenzial berechnen:

$$\underline{F}_G(r) = -\underline{\nabla}U \left[\equiv -\text{grad}(U) \equiv - \left(\frac{\partial}{\partial x}U, \frac{\partial}{\partial y}U, \frac{\partial}{\partial z}U \right)^T \right].$$

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis aus (b), indem Sie den Gradienten des Potenzials bestimmen.

- (d) Berechnen Sie weiterhin

$$\Delta U \equiv \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla}U \left[\equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}U + \frac{\partial^2}{\partial y^2}U + \frac{\partial^2}{\partial z^2}U \right].$$

- (e) Zeichnen Sie U mit *Mathematica* in einem 3D Plot für feste Werte von z .

Vorlesung:	<ul style="list-style-type: none"> • Donnerstags 8:15 Uhr – 9:45 Uhr in EW 201. 																																			
	Mo 10–12 Uhr EW 731 Stefan, Max																																			
	Mo 12–14 Uhr EW 731 Stefan, Max																																			
	Mo 12–14 Uhr FR 0512A Bruno																																			
Tutorien:	Mo 14–16 Uhr EW 202 Eike																																			
	Mo 16–18 Uhr EW 229 Eike																																			
	Di 08–10 Uhr EW 731 Bruno																																			
	Di 12–14 Uhr EW 731 Maria																																			
	Di 16–18 Uhr EW 226 Maria																																			
Klausur:	<ul style="list-style-type: none"> • Donnerstag, den 08.07.2010, von 08:00 – 10:00 Uhr in H 1058. 																																			
Scheinkriterien:	<ul style="list-style-type: none"> • Mindestens 50% der Übungspunkte. • Bestandene Klausur. • Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien. 																																			
Literatur zur Lehrveranstaltung:	<ul style="list-style-type: none"> • Siegfried Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik • Rainer Wüst: Mathematik für Physiker und Mathematiker 1 und 2 • Mathematische Einführungskapitel der Lehrbuchreihen der theoret. Physik, z.B. Greiner, Nolting • Bronstein: Taschenbuch der Mathematik • Hermann Schulz: Physik mit Bleistift : das analytische Handwerkszeug der Naturwissenschaftler • Richard Feynman: Vorlesungen über Physik 																																			
Sprechzeiten:	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Name</th> <th>Tag</th> <th>Zeit</th> <th>Raum</th> <th>Tel.</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Prof. Dr. H. Engel</td> <td>Mi.</td> <td>14:30-16:00</td> <td>EW 738</td> <td>79462</td> </tr> <tr> <td>Stefan Fruhner</td> <td>Fr.</td> <td>13:30-14:30</td> <td>EW 627/28</td> <td>27681</td> </tr> <tr> <td>Max Schmitt</td> <td>Do.</td> <td>10:00-11:00</td> <td>EW 708</td> <td>25225</td> </tr> <tr> <td>Maria Richter</td> <td>Di.</td> <td>15:00-16:00</td> <td>EW 217</td> <td>26143</td> </tr> <tr> <td>Bruno Riemenschneider</td> <td>Mi.</td> <td>15:00-16:00</td> <td>EW 217</td> <td>26143</td> </tr> <tr> <td>Eike Verdenhalven</td> <td>Di.</td> <td>13:00-14:00</td> <td>EW 217</td> <td>26143</td> </tr> </tbody> </table>	Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.	Prof. Dr. H. Engel	Mi.	14:30-16:00	EW 738	79462	Stefan Fruhner	Fr.	13:30-14:30	EW 627/28	27681	Max Schmitt	Do.	10:00-11:00	EW 708	25225	Maria Richter	Di.	15:00-16:00	EW 217	26143	Bruno Riemenschneider	Mi.	15:00-16:00	EW 217	26143	Eike Verdenhalven	Di.	13:00-14:00	EW 217	26143
Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.																																
Prof. Dr. H. Engel	Mi.	14:30-16:00	EW 738	79462																																
Stefan Fruhner	Fr.	13:30-14:30	EW 627/28	27681																																
Max Schmitt	Do.	10:00-11:00	EW 708	25225																																
Maria Richter	Di.	15:00-16:00	EW 217	26143																																
Bruno Riemenschneider	Mi.	15:00-16:00	EW 217	26143																																
Eike Verdenhalven	Di.	13:00-14:00	EW 217	26143																																