6. Tensoren (2-ter Stufe)

6.1 Definition

Wir nennen die quadratische Matrix $\underline{\underline{A}} = (a_{ik}) \rightarrow$ Tensor zweiter Stufe, wenn

$$a'_{ik} = d_{ij}\, d_{kl}\, a_{jl}\ .$$

$\rightarrow$ bzgl. beider Indices wird mit der Drehmatrix multipliziert (und summiert!).

Die Komponenten (Zahlen) können vertauscht werden. Deshalb ist (unter Beachtung der Regeln der Matrixmultiplikation)

$$a'_{ik} = d_{ij}\, d_{kl}\, a_{jl} = d_{ij}\, a_{jl}\, d_{kl} = d_{ij}\, a_{jl}\, d^{T}_{lk} \quad \text{also} \quad \underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{D}}^{T}.$$

6.2 Lineare Antwort-Matrix

Angenommen, zwei Vektoren $\underline{u}$ (Ursache) und $\underline{a}$ (Antwort) stehen in einem <u>linearen</u> kausalen Zusammenhang

$$\underline{a} = \underline{\underline{H}} \cdot \underline{u}\ .$$

Behauptung: Dieser kausale Zusammenhang definiert einen Tensor zweiter Stufe. Beweis:

$$\underline{a}' = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{a} = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{u} = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{H}} \cdot (\underline{\underline{D}}^{-1} \cdot \underline{\underline{D}}) \cdot \underline{u} = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{H}} \cdot (\underline{\underline{D}}^{T} \cdot \underline{\underline{D}}) \cdot \underline{u} = (\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{D}}^{T}) \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{u} = (\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{D}}^{T}) \cdot \underline{u}' = \underline{\underline{H}}' \cdot \underline{u}'$$

Daraus folgt $\quad (\underline{\underline{H}}' - \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{D}}^{T})\underline{u}' = 0$, also ($\underline{u}'$ beliebig) $\quad \underline{\underline{H}}' = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{D}}^{T}$

$\rightarrow \underline{\underline{H}}$ transformiert sich tatsächlich wie ein Tensor zweiter Stufe.

- Leitfähigkeitstensor $\underline{j} = \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{E}$ ($\rightarrow$ ÜBUNG)

- Trägheitstensor

Eine Punktmasse m: Wir sehen in $\underline{L}$ die Antwort auf die Ursache $\underline{\omega}$

$$\underline{L} = \underline{r} \times m\,(\underline{\omega} \times \underline{r}) = m\left(r^2 \underline{\omega} - \underline{r}(\underline{r} \cdot \underline{\omega})\right) =: \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\omega}\,,$$

$$\underline{\underline{T}} = m(r^2 - \underline{r} \circ \underline{r}) = m \begin{pmatrix} r^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} xx & xy & xz \\ yx & yy & yz \\ zx & zy & zz \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{T}}^T$$

Körper aus N Massen m_i: $\underline{L} = \sum_{i=1}^{N} \underline{L}_i = \sum_{i=1}^{N} \underline{\underline{T}}_i \cdot \underline{\omega} =: \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\omega}$ führt auf den (symmetrischen) $\rightarrow$

Trägheitstensor des Körpers

$$\underline{\underline{T}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix}$$

6.3 Hauptachsen-Transformation

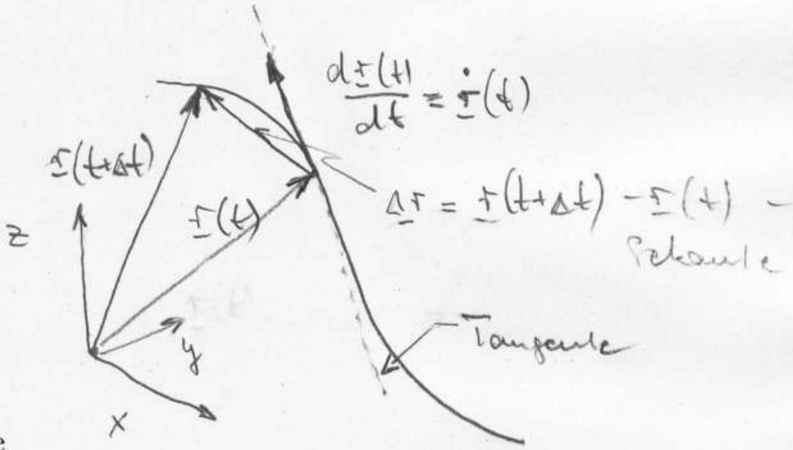
ÜBUNG: $\underline{\underline{T}}$ als symmetrischer Tensor durch geeignete $\underline{\underline{D}}$ diagonalisierbar.

7. Vektorfunktionen

7.1 Definition, Ableitung

Eine Vektorfunktion ist eine Menge von geordneten Paaren $(t, \underline{r}(t))$ im "Produktraum" $R^1 \times R^n$. Die zugelassenen Zahlen $t \rightarrow$ Definitionsbereich, die zugeordneten Vektoren $\underline{r}(t) \rightarrow$ Wertebereich.

Anschauliche geometrische Deutung im R^3: Raumkurve.



Ableitung: $\frac{d\underline{r}}{dt} := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t} =: \dot{\underline{r}}(t)$

(sofern der Limes unabhängig von der Folge $\Delta t \to 0$ existiert). Der Vektor $\frac{d\underline{r}}{dt}$ liegt tangential an der Raumkurve im Punkt $\underline{r}\,(t)$.

Komponentendarstellung der Ableitung (kartesische Koordinaten)

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \text{ usw.}$$

Ableitungen höherer Ordnung rekursiv: $\frac{d^n}{dt^n}\underline{r}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\underline{r}(t)\right)$

Bei Differentiation von Vektorfunktionen Regeln für Differentiation von Funktionen einer unabhängigen Variablen und der Vektoralgebra berücksichtigen.

Beispiel: Produktregeln der Vektordifferentiation:

$$\frac{d}{dt}\left[f(t)\,\underline{a}(t)\right]=\frac{df(t)}{dt}\,\underline{a}(t)+f(t)\,\frac{d}{dt}\underline{a}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\underline{a}(t)\cdot\underline{b}(t)\right]=\underline{b}(t)\cdot\frac{d}{dt}\underline{a}(t)+\underline{a}(t)\cdot\frac{d}{dt}\underline{b}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\underline{a}(t)\times\underline{b}(t)\right]=\left[\frac{d}{dt}\underline{a}(t)\right]\times\underline{b}(t)+\underline{a}(t)\times\frac{d}{dt}\underline{b}(t)$$

■ Die Ableitung einer Vektorfunktion mit konstantem Betrag steht $\perp$ auf dem Vektor

$\underline{a}^2(t)=\text{const},\quad \underline{a}\cdot\frac{d\underline{a}}{dt}+\frac{d\underline{a}}{dt}\cdot\underline{a}=2\underline{a}\cdot\frac{d\underline{a}}{dt}=0$ $\rightarrow$ das ist speziell für alle EHV nützlich.

■ $\underline{r}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix},\quad |\dot{\underline{r}}|\neq\frac{d|\underline{r}|}{dt},\quad \left(\dot{r}\neq\frac{dr}{dt}\right)$

$|\dot{\underline{r}}|=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$ - Betrag/Länge des Vektors $\dot{\underline{r}}$ (z.B. Geschwindigkeit)

$$\frac{d}{dt}|\underline{r}|=\frac{d}{dt}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\dot{x}+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\dot{x}+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\dot{x}=\dot{\underline{r}}\cdot\frac{\underline{r}}{r}\quad(=v_{\parallel})$$

$\rightarrow$ zeitliche Änderung des Abstands vom Ursprung.

■ Isaac Newton leitet das Gravitationsgesetz aus den Gesetzen der Planetenbewegung von Johannes Kepler ab.

Bei dieser Ableitung spielt die Bahnkurve eine entscheidende Rolle. Ist $\underline{r}\,(t)$ Bahnkurve eines MP, dann ist $\dot{\underline{r}}(t)$ seine Geschwindigkeit und $\ddot{\underline{r}}(t)$ die Beschleunigung zur Zeit t. Nach der Newton´schen Bewegungsgleichung kann man aus der Beschleunigung auf die einwirkende Kraft schließen

$$\underline{F}(\underline{r})=m\frac{d^2\underline{r}}{dt^2}=m\,\ddot{\underline{r}}\qquad(m=\text{const}).$$

Ergebnis (Übungsblatt)

$$\ddot{\underline{r}}(t) = \frac{L}{p\,m}\begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}\dot{\varphi} = -\frac{L^2}{p\,m^2}\frac{1}{r^2}\frac{\underline{r}}{r}$$

→ die Beschleunigung ist umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands und vom Planet zur Sonne gerichtet ($-\underline{r}/r$).

Aus Newton'scher Bewegungsgleichung $m\frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = m\ddot{\underline{r}} = \frac{\gamma m M}{r^2}\frac{\underline{r}}{r} = \underline{F}(\underline{r})$ → Gravitationsgesetz.

Der → Bahnparameter $p = \frac{L^2}{\gamma M m^2}$ ist vollständig durch die Massen, den Betrag des Drehimpulses und die Gravitationskonstante bestimmt.

Bemerkungen:

(i) Bahnexzentrizität ε ist von der Gesamtenergie E abhängig:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m(\gamma m M)^2}}$$

(ii) Newton schließt aus Bahnkurve und Flächensatz auf Kraftgesetz $F \sim \frac{1}{r^2}$. Bei $F \sim \frac{1}{r^{2+\delta}}$ wären die Bahnkurven für beliebig kleines δ nicht geschlossen → Periheldrehung des Merkur (L^2 Band I § 14), ↔ ART.

(iii) Bei $F \sim \frac{1}{r^2}$ auch Hyperbelbahnen möglich, Streuung, Rutherford'sche Streuformel (L^2 Band I § 18/19).

- **Drehimpuls**

Zeitliche Änderung des Drehimpulses $\underline{L} := \underline{r} \times \underline{p} = m\, \underline{r} \times \dot{\underline{r}}$:

$$\dot{\underline{L}} := m\, \dot{\underline{r}} \times \dot{\underline{r}} + m\, \underline{r} \times \ddot{\underline{r}} = \underline{r} \times \underline{F} = \underline{M} \; .$$

Für $\underline{F}(\underline{r}) = F(\underline{r}) \frac{\underline{r}}{r}$ $\rightarrow$ **Zentralkraft** ist $\dot{\underline{L}} = 0$, d.h. $\underline{L} = \text{const}$ (unabhängig von t) $\rightarrow$

Drehimpulserhaltung (bzgl. Kraftzentrum). Das bedeutet, die Bahnkurven sind eben.

- **Energie und Potential**

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} \;\Big|\cdot \dot{\underline{r}}\,, \quad m\dot{\underline{r}} \cdot \ddot{\underline{r}} = \dot{\underline{r}} \cdot \underline{F}\,, \quad \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2\right)}_{\text{Zuwachs der kinetischen Energie}} = \underbrace{\frac{d\underline{r} \cdot \underline{F}}{dt}}_{\text{in dt am Teilchen geleistete Arbeit}} \; .$$

Annahme: Es existiere eine skalare Funktion $U(\underline{r})$ $\rightarrow$ Potenzial mit

$$\underline{F}(\underline{r}) = -\begin{pmatrix} \partial_x U \\ \partial_y U \\ \partial_z U \end{pmatrix} \equiv -\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} =: -\text{grad}\, U(\underline{r})\,. \quad \text{Dann ist}$$

$$\frac{dU(\underline{r}(t))}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt} = -\dot{\underline{r}}(t) \cdot \underline{F}(\underline{r}) \; , \text{ folglich}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 + U(\underline{r})\right] = 0 \quad \text{bzw.} \quad \underline{\frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 + U(\underline{r}) =: E = \text{const}} \quad \textbf{Erhaltung der mechanischen Energie}.$$

$$\text{Definiere den Vektoroperator } \underline{\nabla} := \begin{pmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \\ \partial / \partial z \end{pmatrix} \rightarrow \textbf{Nabla-Operator}.$$

Dann ist $\underline{F}(\underline{r}) = -\underline{\nabla}\, U(\underline{r})$ ... $\rightarrow$ Ausblick Felder.