Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Clive Emary

5. Übungsblatt – Theoretische Festkörperphysik I,II

Abgabe: Fr. 28.05.2010 bis 12:00 Uhr, EW705.
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 11 (6 Punkte): *Bloch oscillations*

Show that the single-band tight-binding Hamiltonian in terms of Wannier states $|n\rangle$,

$$H = -\frac{\Delta}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n|\right) + dF\sum_{n=-\infty}^{\infty} n|n\rangle\langle n|, \tag{1}$$

can be written in the basis of Bloch states $|k\rangle = \sqrt{\frac{d}{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n\rangle e^{inkd}$ as $\langle k'|H|k\rangle = d\delta(k-k')H(k)$ with

$$H(k) = -\frac{\Delta}{2}\cos kd + iF\frac{d}{dk}.$$

Show that the eigen-energies of this Hamiltonian are $E_m = mdF$, with $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (the Wannier-stark ladder) with eigenfunctions

$$\Psi_m(k) = \langle k|\Psi_m\rangle = \sqrt{\frac{d}{2\pi}}e^{-i[mkd+\gamma\sin kd]}; \qquad \gamma = \Delta/2dF,$$

in Bloch representation, and $\Psi_m(n) = \langle n|\Psi_m\rangle = J_{n-m}(\gamma)$ in the Wannier basis (with Bessel function J). Demonstrate explicitly that wavefunctions $|\Psi_m\rangle = \sum_n J_{n-m}(\gamma)|n\rangle$ are eigenstates of the tightbinding Hamiltonian, Eq. (1). Hint: you will need to use the recursion properties of the Bessel functions. Finally, determine the time-dependent coefficients $c_n(t)$ in the expansion $|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)|n\rangle$ for an electron initially localised at the origin, i.e. $c_n(t=0) = \delta_{n,0}$.

Aufgabe 12 (8 Punkte): *Floquet theory of a driven two-level system*

Consider the periodically-driven two-level Hamiltonian

$$\mathcal{H}(t) = -\frac{V_0}{2}\cos(\omega t)\sigma_z - \frac{\Delta}{4}\sigma_x.$$

By numerical integration of the time-dependent Schrödinger equation, determine the Monodromy matrix and thus the Floquet exponents of the system for a range of different parameter values. Plot your results and compare with the perturbative solution of the lecture (Skript 4.5.5).

Aufgabe 13 (6 Punkte): *Dichte-Responsefuncktion*

Berechne die Dichte-Responsefunktion $\chi_0(\mathbf{q},\omega)$ im Rahmen der kinetischen Theorie,

$$\chi_0(\mathbf{q},\omega) \equiv \frac{1}{L^d}\sum_{\mathbf{p}}\frac{\mathbf{q}\nabla_{\mathbf{p}}f_0(\mathbf{p})}{\omega + i\delta - \mathbf{v}_{\mathbf{p}}\mathbf{q}},$$

für ein Gas wechselwirkungsfreier Elektronen bei der Temperatur $T = 0$ in drei Dimensionen. Hinweis: Führe die kombinierte Variable $x = \omega/(v_F q)$ ein, wobei v_F die Fermi-Geschwindigkeit ist ($\frac{1}{2}mv_F^2 = E_F$, Fermi-Energie). Beachte weiterhin, dass

$$-\frac{\partial}{\partial t}f_0(\mathbf{p})\varepsilon_p = \delta(E_F - \varepsilon_p), \quad \varepsilon_p = \frac{p^2}{2m}.$$