Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Clive Emary

7. Übungsblatt – Theoretische Festkörperphysik I,II

Abgabe: Fr. 11.06.2010 bis 12:00 Uhr, EW705.

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 17 (6 Punkte): *Second quantization*

For fermionic creation and annihilation operators $c_\alpha^\dagger$ and c_α, prove:

- the commutation relation

$$\left[c_\alpha^\dagger c_\beta, c_\gamma^\dagger c_\delta\right] = c_\alpha^\dagger c_\delta \delta_{\beta\gamma} - c_\gamma^\dagger c_\beta \delta_{\alpha\delta},$$

- that, starting from the definition of the operator in first quantisation, the Fourier transform of the density operator is

$$\hat{\rho}_{\mathbf{q}} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\sigma}.$$

Aufgabe 18 (14 Punkte): *Lindhard-function*

Consider a free electron gas with Hamiltonian $\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \varepsilon_{\mathbf{k}\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma}$.

- Show that the annihilation operator in the interaction-picture is $\widetilde{c}_{\mathbf{k}\sigma}(t) = e^{-i\varepsilon_{\mathbf{k}\sigma}t} c_{\mathbf{k}\sigma}$.
- From the definitions

$$\chi_0(\mathbf{q}, \omega) \equiv \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \chi_0(\mathbf{q}, t); \quad \Im\omega > 0,$$

and

$$\chi_{\mathbf{q},-\mathbf{q}'}(t - t') \equiv i\langle [\widetilde{\rho}_{\mathbf{q}}(t), \widetilde{\rho}_{-\mathbf{q}'}(t')] \rangle_{\mathbf{eq}} \theta(t - t') \equiv L^d \chi_0(\mathbf{q}, t - t') \delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}'},$$

show that Lindhard function (density response function) can be written as

$$\chi_0(\mathbf{q}, \omega) = -\frac{1}{L^d} \sum_{\mathbf{k}\sigma} \frac{f(\varepsilon_{\mathbf{k}}) - f(\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})}{\omega + i\delta + \varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}}.$$

- Compare the above expression for $\chi_0(\mathbf{q}, \omega)$ with the semi-classical result (Aufgabe 13). Hint: expand for small $\mathbf{q}$.
- Explicitly evaluate $\chi_0(\mathbf{q}, \omega)$ in $d = 3$ dimensions.