Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. S. Klapp,
Dr. Carsten Weber, Dipl. Phys Arash Azhand,
Dipl. Phys. Ken Lichtner, Dipl. Phys. Philipp Zedler,
Tanja Schlemm, Jan Techter

22. Juli 2010

3. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik 2010

Abgabe: Di. 11.05.2010 8:30 Uhr, in der Vorlesung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben, der Zettel wird sonst nicht korrigiert! Abgabe bitte in 3er Gruppen – keine Einzelabgabe.

Aufgabe 6 (8 Punkte): *Impulsdarstellung*
In der Vorlesung wurde der Impulsoperator in Ortsdarstellung über die Invarianz des Erwartungswerts unter Basiswechsel hergeleitet. Für den Erwartungswert eines Operators $\hat{F}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}})$ ergibt sich im Ortsraum die Form $\langle \hat{F} \rangle = \int d^3r \psi^*(\mathbf{r}, t) F(\mathbf{r}, \frac{\hbar}{i}\nabla_{\mathbf{r}})\psi(\mathbf{r}, t)$.

(a) Leiten Sie hier analog zur VL den Ortsoperator $\hat{\mathbf{r}}$ in der Impulsdarstellung her.

(b) Stellen Sie die Schrödinger-Gleichung (mit Potential $V(\mathbf{r})$) in Impulsdarstellung, also für die Wellenfunktion $\tilde{\psi}(\mathbf{p}, t)$, auf.
Hinweis: Fourier-transformieren Sie dazu die Schrödinger-Gleichung und integrieren Sie partiell.

(c) Wie sieht die zugehörige stationäre Schrödinger-Gleichung aus?

Aufgabe 7 (9 Punkte): *Nicht-Vertauschbarkeit von linearen Operatoren*
Im folgenden sollen ein paar wichtige Kommutatoren berechnet werden. Der Impulsoperator in Ortsdarstellung ist dabei gegeben durch $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla_{\mathbf{r}}$, während der Ortsoperator in Impulsdarstellung über $\hat{\mathbf{r}} = i\hbar\nabla_{\mathbf{p}}$ definiert ist.

(a) Beweisen Sie zuerst die häufig gebrauchte Formel

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}].$$

(b) Berechnen Sie den Kommutator $[f(\hat{x}_i), \hat{p}_j]$ in der Ortsdarstellung, wobei f eine überall differenzierbare, aber sonst beliebige Funktion ist. Was folgt speziell für $[\hat{x}_i, \hat{p}_j]$?

(c) Berechnen Sie den Kommutator $[f(\hat{p}_i), \hat{x}_j]$ entweder in der Impulsdarstellung oder darstellungsunabhängig über die Definition von $f(\hat{p})$ über seine Taylor-Entwicklung $f(\hat{p}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \hat{p}^n$. Was ergibt sich für den interessanten Fall $[\hat{\mathbf{p}}^2, x_i]$?

(d) Zeigen Sie, dass für zwei Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$, für welche die Kommutatoren $[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{A}] = [[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}] = 0$ gelten, folgende Relation gilt:

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-[\hat{A}, \hat{B}]/2}.$$

Hierbei ist die Exponentialfunktion über $e^{\hat{A}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^n}{n!}$ definiert.
Hinweis: Benutzen Sie die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel um zu zeigen, dass die Funktionen $f(t) = e^{t(\hat{A}+\hat{B})}$ und $g(t) = e^{t\hat{A}} e^{t\hat{B}} e^{-t^2[\hat{A}, \hat{B}]/2}$ der gleichen linearen DGL 1. Ordnung zu gleichen Anfangsbedingungen gehorchen.

Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. S. Klapp,
Dr. Carsten Weber, Dipl. Phys Arash Azhand,
Dipl. Phys. Ken Lichtner, Dipl. Phys. Philipp Zedler,
Tanja Schlemm, Jan Techter

22. Juli 2010

Aufgabe 8 (3 Punkte): *Kontinuitätsgleichung*
Für die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\mathbf{r},t) = |\psi(\mathbf{r},t)|^2$ gilt, ähnlich wie in der klassischen Elektrodynamik, die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho(\mathbf{r},t) + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r},t) = 0$$

mit der Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung, dass die Wahrscheinlichkeit erhalten ist, d.h. dass aus der Normierungsbedingung $\int d^3r |\psi(\mathbf{r}, t=0)|^2 = 1$ folgt $\int d^3r |\psi(\mathbf{r},t)|^2 = 1$. Nehmen Sie dabei an, dass die Stromdichte hinreichend schnell abfällt, d.h. $jr^2 \to 0$ für $r \to \infty$.

(b) Berechnen Sie für eine auf das Volumen V normierte ebene Welle die Wahrscheinlichkeitsstromdichte und führen Sie diese auf die anschauliche Form $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}, \mathbf{v} = \mathbf{p}/m$ zurück.

Vorlesung:
- Dienstag 8:00 Uhr – 10:00 Uhr im EW 201
- Mittwoch 8:00 Uhr – 10:00 Uhr im EW 201

Scheinkriterien:
- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Bestandene Klausur.
- Regelmässige und aktive Teilnahme in den Tutorien und einmal Vorrechnen.

Klausurtermin:
- 6. Juli, 7:30 in Raum H0105

Tutorien:
- Di 10:00 – 12:00 Tanja Schlemm (EW 246)
- Mi 12:00 – 14:00 Jan Techter (EW 731)
- Mi 14:00 – 16:00 Carsten Weber (EW 246) ** **noch Plätze frei** **
- Do 8:00 – 10:00 Ken Lichtner (EW 229)
- Do 10:00 – 12:00 Tanja Schlemm (EW 226)
- Do 10:00 – 12:00 Philipp Zedler (EW 731)
- Do 14:00 – 16:00 Jan Techter (EW 246)
- Fr 10:00 – 12:00 Arash Azhand (EW 226)

Sprechstunden:
- Prof. Dr. S. Klapp: Mi 11:15 – 12:00 Uhr (EW 707)
- Dr. Carsten Weber: Do 15:15 – 16:00 Uhr (EW 710)
- Dipl. Phys. Arash Azhand: Do 11:15 – 12:00 Uhr (EW 627)
- Dipl. Phys. Ken Lichtner: Di 10:15 – 11:00 Uhr (EW 266)
- Dipl. Phys. Philipp Zedler: Fr 10:15 – 11:00 Uhr (EW 711)

Literatur zur Lehrveranstaltung:
- Albert Messiah, Quantenmechanik Band 1 und 2, Walter de Gruyter, Berlin 1991
- W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 5/1 & 5/2 (Springer, 2002)
- Eugen Fick, Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie, 5. Auflage, Aula-Verlag, Wiesbaden 1984