Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. S. Klapp,
Dipl. Phys Arash Azhand, Dipl. Phys. Ken Lichtner, Dipl. Phys. Philipp Zedler,
Tanja Schlemm, Jan Techter

7. Mai 2010

2. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik 2010

Abgabe: Di. 04.05.2010 8:30 in der Vorlesung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben, der Zettel wird sonst nicht korrigiert! Abgabe bitte in 3er Gruppen – keine Einzelabgabe.

Aufgabe 3 (6 Punkte): *Plancksches Strahlungsgesetz*

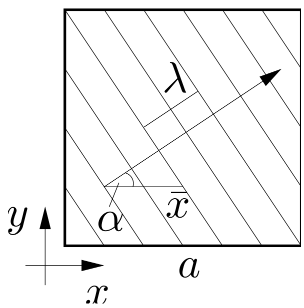
(a) Die Plancksche Hypothese besagt, dass das Strahlungsfeld eines schwarzen Körpers aus einer Vielzahl von harmonischen Oszillatoren besteht, deren Energiespektren diskret sind. Um die mittlere Energie pro Oszillator zu erhalten, muss über die diskreten Energieniveaus summiert werden. Mit den elementaren Energiequanten ϵ_0 und Boltzmannstatistik für die Anzahl $N(n)$ der Oszillatoren mit Energie $E_n = n\epsilon_0$ erhalten wir (siehe Vorlesung) die mittlere Oszillatorenergie als

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} N(n) n\epsilon_0}{\sum_{n=0}^{\infty} N(n)} \\ &= \frac{\epsilon_0}{e^{\frac{\epsilon_0}{k_B T}} - 1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Beweisen Sie Gleichung 1. Der Nenner kann direkt mit der geometrischen Reihe ausgewertet werden. Für den Zähler bietet es sich an, $\sum_n ny^n = y\frac{d}{dy}\sum_n y^n$ zu verwenden.

(b) Bilden Sie für die Plancksche Strahlungsformel die Grenzwerte $h\nu \ll k_B T$ und $h\nu \gg k_B T$ und leiten Sie so Ausdrücke für das Rayleigh-Jeans Gesetz und das Wiensche Strahlungsgesetz her.

(c) Die Herleitung der Strahlungsformel von Rayleigh kann als exakte klassische Rechnung erfolgen. Dabei brauchen wir nach dem klassischen Gleichverteilungssatz bloß die Zustandsdichte, um sie mit $\frac{1}{2}k_B T$ zu multiplizieren. Wir berechnen die möglichen elektromagnetischen Eigenschwingungen in einem Quader mit Kantenlänge a. Sei λ die Wellenlänge, seien $\bar{x}$, $\bar{y}$ und $\bar{z}$ ihre Projektionen auf die x, y und z-Achse und seien α, β und γ die Winkel zwischen der Normalen auf den Wellenfronten und den drei Koordinatenachsen. Wir erhalten stehende Wellen, wenn sich die Kantenlänge als positives ganzzahliges Vielfaches der Projektionen schreiben lässt, also als $a = n_1\bar{x}+n_2\bar{y}+n_3\bar{z}$. Berechnen Sie den Radius der Kugel aller möglichen Zustände mit stehenden Wellen, $R^2 = n_1^2{=}n_2^2{=}n_3^2$. Berechnen Sie das Volumen des Teils dieser Kugel mit positiven n_i. Division durch das Volumen des Quaders liefert die Zustandsdichte.



Aufgabe 4 (4 Punkte): *Fouriertransformation*

Die Fouriertransformation von einem Produkt ist eine Faltung. Nutzen Sie das, um zu zeigen, dass

$$\int d\underline{r} e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}} e^{-i\underline{k}_0\cdot\underline{r}} f(\underline{r}) = (2\pi)^{3/2} \tilde{f}(-\underline{k}+\underline{k}_0).$$

Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. S. Klapp,
Dipl. Phys Arash Azhand, Dipl. Phys. Ken Lichtner, Dipl. Phys. Philipp Zedler,
Tanja Schlemm, Jan Techter

7. Mai 2010

Aufgabe 5 (10 Punkte): *Eindimensionales Gaußsches Wellenpaket*

Wir wollen die Wellenfunktion zu allen Zeiten berechnen für ein Wellenpaket, das zur Zeit $t = 0$ die Form

$$\psi(x,0) \;=\; \frac{1}{\sqrt{a\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} e^{ik_0 x}$$

hat. Prüfen Sie zuerst, ob die gewählte Normierung Sinn macht. Formulieren Sie dann die Schrödingergleichung und fouriertransformieren Sie diese, um eine Bestimmungsgleichung für

$$\tilde{\psi}(k,t) \;=\; \int dx e^{-ikx} \psi(x,t)$$

zu erhalten. Dabei wird aus der zweifachen Ortsableitung ein rein algebraischer Ausdruck. Die Differentialgleichung für $\tilde{\psi}(k,t)$ kann einfach gelöst werden. Die dabei benötigte Anfangsbedingung $\tilde{\psi}(k,0)$ erhalten wir durch Fouriertransformation von $\psi(x,0)$. Auf das Ergebnis müssen wir jetzt noch die Umkehrung der Fouriertransformation anwenden. Prüfen Sie, ob in Ihrem Resultat die Einheiten stimmig sind. Mit der Größe $a(t) := a\sqrt{1 + \left(\frac{\hbar t}{ma^2}\right)^2}$ kann das Ergebnis kompakter hingeschrieben werden. Lesen Sie aus der Formel ab, ob der Erwartungswert des Ortes x den Newtonschen Axiomen gehorcht. Die Breite der Verteilung wächst und kann durch $a(t)$ ausgedrückt werden. Wie lange dauert es, bis sich die Breite des Wellenpakets verdoppelt hat? Betrachten Sie zunächst ein makroskopisches Teilchen der Masse $m = 10^{-3}kg = 1g$ und dann als mikroskopisches Teilchen ein Elektron der Masse $m = 10^{-30}kg$.

Vorlesung:

- Dienstag 8:00 Uhr – 10:00 Uhr im EW 201
- Mittwoch 8:00 Uhr – 10:00 Uhr im EW 201

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Bestandene Klausur.
- Regelmässige und aktive Teilnahme in den Tutorien und einmal Vorrechnen.

Klausurtermin:

- 6. Juli, 7:30 in Raum H0105

Sprechstunden:

- Prof. Dr. S. Klapp: Mi 11:15 – 12:00 Uhr (EW 707)
- Dipl. Phys. Arash Azhand: Do 11:15 – 12:00 Uhr (EW 627)
- Dipl. Phys. Ken Lichtner: Di 10:15 – 11:00 Uhr (EW 266)
- Dipl. Phys. Philipp Zedler: Fr 10:15 – 11:00 Uhr (EW 711)

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- Albert Messiah, Quantenmechanik Band 1 und 2, Walter de Gruyter, Berlin 1991
- W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 5/1 & 5/2 (Springer, 2002)
- Eugen Fick, Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie, 5. Auflage, Aula-Verlag, Wiesbaden 1984