19.4.10

1. Übung Nichtlineare Dyn. & Kontrolle

Wiederholung VL:

Dynamisches System:

(*) $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}(t), t)$ Anfangsbed. $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$

$F: V \times \mathbb{R}_t \to V$ $V \subset \mathbb{R}^n$

Mathematische Grundl.

Annahmen:

1. F stetige Fkt. auf $V \times \mathbb{R}_t$
2. F erfüllt Lipschitz Bedingung für eine Konstante K

$$\|\underline{F}(\underline{x}, t) - \underline{F}(\underline{y}, t)\| \leq K \|\underline{x} - \underline{y}\|$$

Theorem:

1. Für alle Anfangsbedingungen (AB) existiert eine differenzierbare Lsg $\underline{x}(t)$ von (*) auf $V \times \mathbb{R}_t$
2. Die Lsg ist eindeutig bestimmt durch (*) und AB
3. Die Lsgen hängen stetig von den AB ab

$$\|\underline{x}(t) - \underline{y}(t)\| \leq \exp(K|t - t_0|) \|\underline{x}(t_0) - \underline{y}(t_0$$

Beispiele für sich schlecht verhaltende Lsg:

1. $\dot{x} = \sqrt{|x|}$ $\qquad x \in \mathbb{R}_+$

$x(0) = x_0$

Eine Lsg ist

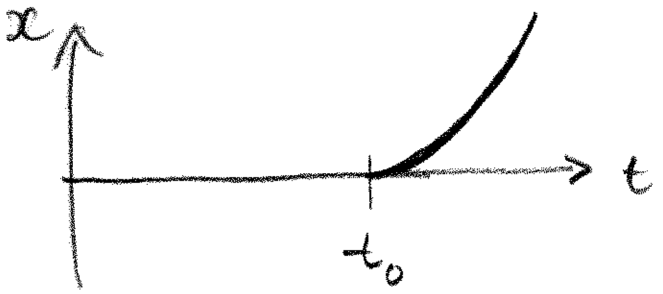
$$x(t) = (c + t/2)^2 \qquad c = \sqrt{x_0}\,.$$

Für $x_0 = 0$ gibt es aber auch die Lsg.

$x = 0$.

Es gibt ∞ viele Lsg.

$$x(t) = \frac{1}{4}\Theta(t-t_0)(t-t_0)^2$$



Lsg nicht eindeutig

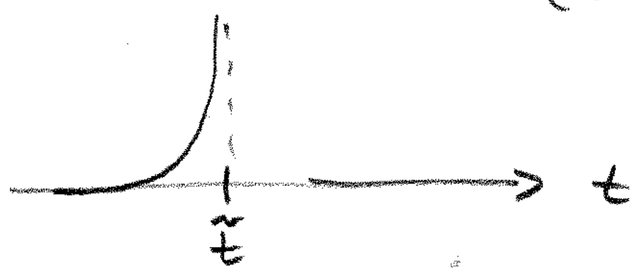
2. Betrachte

$$\dot{x} = 1 + x^2 \qquad x(0) = x_0$$

Lsg:

$$\frac{dx}{1+x^2} = dt \quad \rightarrow \quad x(t) = \tan(t + \arctan x_0)$$

~~Lsg~~ blow-up



Fixpunkte:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}(t))$$

FP: $\quad 0 = \underline{F}(\underline{x}^*)$ n Gleichunge für n Koordinaten

da F i.a. nicht linear

→ mehrere Lsg

Stabilität von FP:

$\underline{x} = \underline{x}^* + \delta\underline{x}$ was passiert mit Störung

$$\delta\dot{\underline{x}} = \dot{\underline{x}} - \underbrace{\dot{\underline{x}}^*}_{=0} = \underline{F}(\underline{x}) = \underline{F}(\underline{x}^* + \delta\underline{x})$$

$$= \underbrace{\underline{F}(\underline{x}^*)}_{=0} + \underbrace{D\underline{F}(\underline{x}^*)}_{\text{Jacobi-Matrix bei } \underline{x}^*} \delta\underline{x} + \mathcal{O}(\|\delta x\|^2)$$

bestimmt stabilität

Love Affairs (Strogatz 1988)

$R>0 \quad R<0$

$R(t)$ Romeos Liebe/Hass f. Julia

$J(t)$ Julias Liebe/Hass f. Romeo

$J>0 \quad J<0$

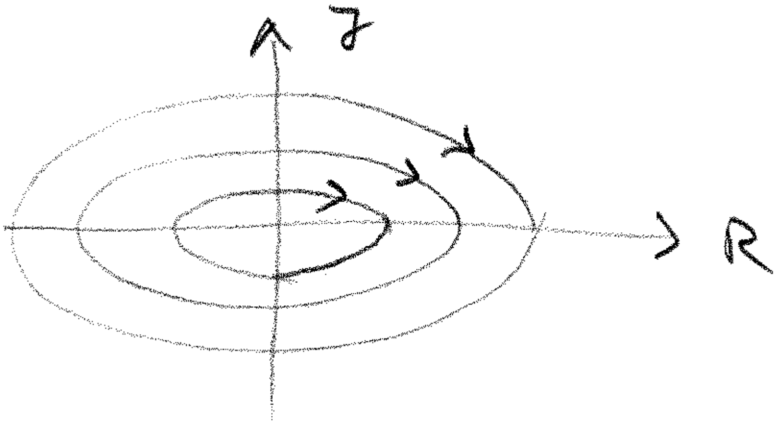
$$\dot{R} = aJ$$
$$\dot{J} = -bR$$
$$a,b>0$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \dot{R} \\ \dot{J} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix}$$

Eigenwerte

$$\lambda^2 + ab = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \lambda = \pm i\sqrt{ab}$$

Zentrum



Zwei "vorsichtige Liebhaber"

$$\dot{R} = aR + bJ \qquad \begin{pmatrix}\dot{R}\\ \dot{J}\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{pmatrix}R\\ J\end{pmatrix}$$

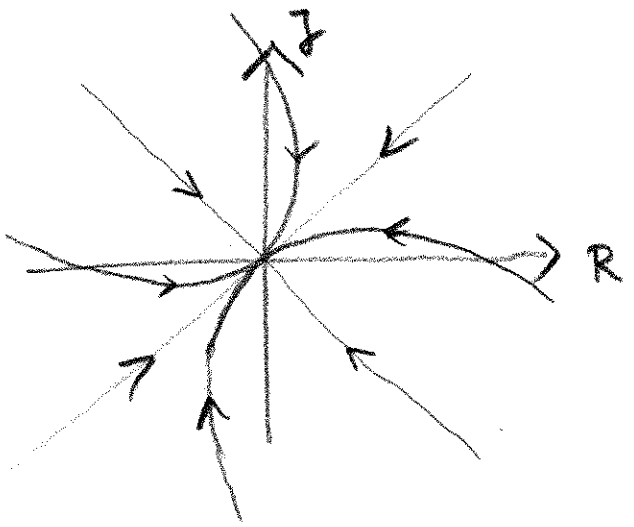
$$\dot{J} = bR + aJ$$

$a < 0$ Grad der Vorsicht

$b > 0$ Grad der Erwiderung

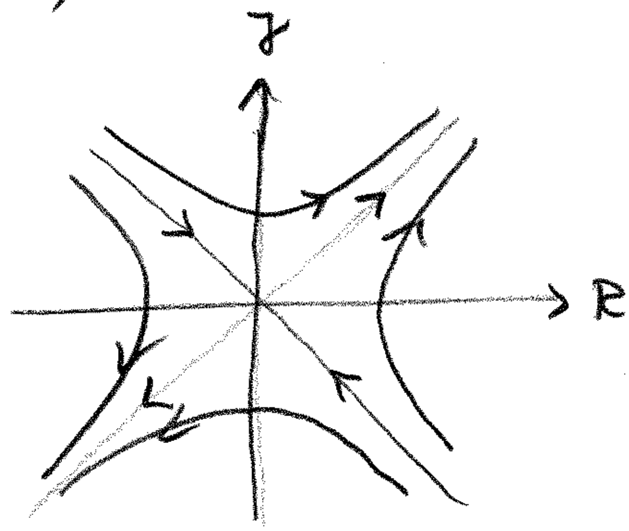
$\lambda_1 = a + b \qquad v_1 = (1, 1)$

$\lambda_2 = a - b \qquad v_2 = (1, -1)$



$a^2 > b^2$

stabiler Knoten



$a^2 < b^2$

Sattel