Valentin Flunkert 7.6.10

7. Übung nichtlineare Dynamik & Kontrolle

Synchronisation von dynamischen Systemen

- erste Untersuchungen 17. Jahrhundert Christian Huygens beobachtet Synchronisation von Pendeluhren (youtube: "synchronization metronome")

- Einfachstes Modell: Phasenoszillatoren

$$\dot{\phi}_1 = \omega_1 + \frac{a}{2} Q_1(\phi_1, \phi_2)$$

$$\dot{\phi}_2 = \omega_2 + \frac{a}{2} Q_2(\phi_1, \phi_2)$$

Modell für Kopplung (motiviert aus Fourierreihe)

$$Q_1 = \sin(\phi_2 - \phi_1)$$

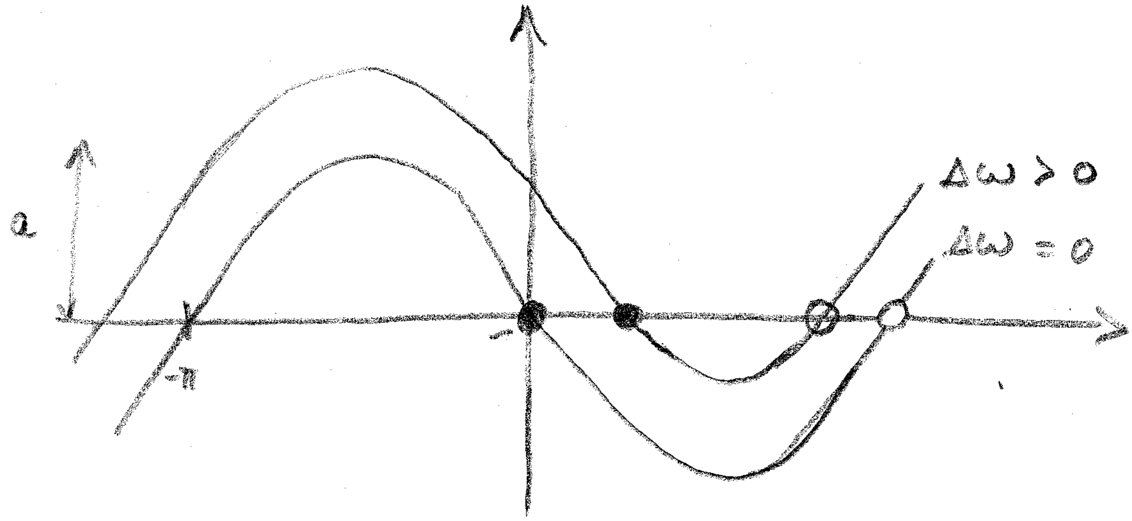
$$Q_2 = \sin(\phi_1 - \phi_2)$$

Neue Variable $\Delta\phi := \phi_2 - \phi_1$

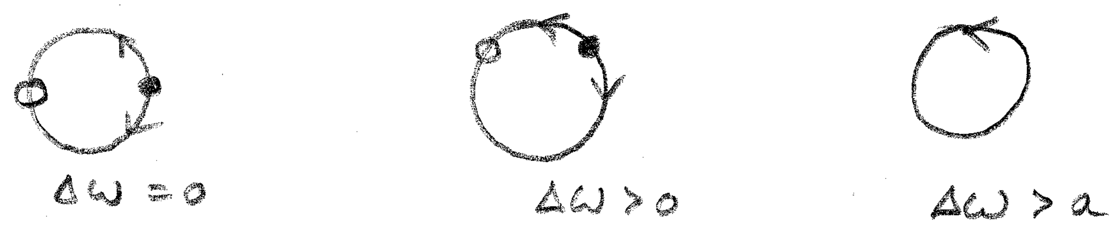
$$\Delta\dot{\phi} = \underbrace{(\omega_2 - \omega_1)}_{\Delta\omega} - a\sin(\Delta\phi)$$

$$\boxed{\Delta\dot{\phi} = \Delta\omega - a\sin(\Delta\phi) \qquad (1)}$$

Fixpunkte von Gl. 1



- Es ex. stabiler und instabiler FP



- Ein FP entspricht synchronisiertem Zustand mit phasendifferenz $\Delta\phi$

- Für $\Delta\omega$ zu groß ($> a$) können Oszillatoren nicht mehr synchronisieren

- Anwendungsbeispiele
  Josephson-Junction, Glühwürmchen ...

→ Projekt zu diesem Thema

Chaos synchronisation:

Beispiel: gekoppelte Lorenzsysteme

System 1	System 2:
$\dot{x}_1 = \sigma(y_1 - x_1)$	$\dot{x}_2 = \sigma(y_2 - x_2) - \boxed{k(x_2 - x_1)}$ (Kopplung)
$\dot{y}_1 = \rho x_1 - y_1 - x_1 z_1$	$\dot{y}_2 = \rho x_2 - y_2 - x_2 z_2$
$\dot{z}_1 = x_1 y_1 - \beta z_1$	$\dot{z}_2 = x_2 y_2 - \beta z_2$

Master $\longrightarrow$ Slave

- Es ex. synchronisierte Lsg
  Überprüfen: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$ einsetzen
- Abstrakte Form:
  $$\dot{X}_1 = f(X_1) \qquad \dot{X}_2 = f(X_2) + k(X_2 - X_1)$$

Frage: Ist synchronisation stabil?

Was passiert mit einer Abweichung
$$\delta X = X_2 - X_1 \text{ ?}$$

δX wird mit der Zeit größer $\rightarrow$ synchr. instabil

δX wird mit der Zeit kleiner $\rightarrow$ synchr stabil

$$\delta X = X_2 - X_1 \,, \qquad X_2 = X_1 + \delta X$$

$$\delta \dot{X} = \dot{X}_2 - \dot{X}_1 = f(X_2) + h(X_2 - X_1) - f(X_1)$$

$$= f(X_1 + \delta X) + h(\delta X) - f(X_1)$$

$$\simeq f(X_1) + Df(X_1)\,\delta X + Dh(0)\,\delta X - f(X_1)$$

$$= [\,Df(X_1) + Dh(0)\,]\,\delta X$$

<u>Bemerkungen:</u>

- Lyapunov-Exponent dieser Variationsgl. ist entscheidend:

$$\lambda_T := \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\| \delta X(t) \|}{\| \delta X(0) \|}$$

<u>Transversaler Lyapunov-Exponent</u>

- Vergleich mit parallelem Lyap-Exp $\lambda_{\|}$ (der gewöhnliche)

$$\delta \dot{X} = Df(X_1)\,\delta X \longrightarrow \lambda_{\|}$$

andere Variationsgl.

- Kopplung muß dafür sorgen, dass $\lambda_T < 0$ obwohl $\lambda_{\|} > 0$

- andere Kopplung führt auf andere Variationsgl. (nicht immer $\cdot D h(0)$)

Master stability Function:

Annahme: N Systeme in einem Netzwerk gekoppelt (1D-Maps)

$$x^i_{k+1} = f(x^i_k) + \sigma \sum_{j=1}^{N} G_{ij}\, h(x^j_k)$$

Element Index

diskrete Zeit.

Was können wir über Stabilität der Synchronisation für beliebiges Netzwerk G aussagen?

- Damit synchrone Lsg existiert muss G konstante Zeilensumme haben:

$$\sum_j G_{ij} = 0$$

(unabhängig v. i)

siehe HA

- Sei $\bar{x}_k$ synchrone Lsg:

$$\bar{x}_{k+1} = f(\bar{x}_k)$$

Betrachte Störungen um synchrone Lsg

$$x_k^i = \bar{x}_k + \delta x_k^i$$

Einsetzen und linearisieren (wie oben)

$$\delta x_k^i = f'(\bar{x}_k)\,\delta x_k^i + \sigma \sum_{j=1}^{N} G_{ij}\, h'(\bar{x}_k)\,\delta x_k^i \qquad (2)$$

- Verwende Vektorschreibweise

$$\underline{\delta X}_k := (\delta x_k^1, \delta x_k^2, \dots, \delta x_k^N)$$

Gl (2):

$$\underline{\delta X}_{k+1} = f'(\bar{x}_k)\, \underline{\underline{1}}_N\, \underline{\delta X}_k + \sigma h'(\bar{x}_k)\, \underline{\underline{G}}\, \underline{\delta X}_k$$

skalare Faktoren

• Diagonalisiere G:

$$\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{G}}\,\underline{\underline{U}}^{-1} = \underline{\underline{A}} \qquad \underline{\underline{A}} = \mathrm{diag}(\underbrace{\gamma_1, \dots, \gamma_N}_{\text{Eigenwerte v. } G})$$

Damit

$$\underline{\underline{U}}\,\delta\underline{X}_{k+1} = f'(\bar{x}_k)\,\underline{\underline{1}}_N\,\underline{\underline{U}}\,\delta\underline{X}_k + \sigma h'(\bar{x}_k)\,\underbrace{\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{G}}\,\underline{\underline{U}}^{-1}}_{\underline{\underline{A}}}\,\underline{\underline{U}}\,\delta\underline{X}_k$$

$$\delta\underline{Y}_k := \underline{\underline{U}}\,\delta\underline{X}_k$$

$$\rightarrow \quad \delta\underline{Y}_{k+1} = f'(\bar{x}_k)\,\underline{\underline{1}}_N\,\delta\underline{Y}_k + \sigma h'(\bar{x}_k)\,\underline{\underline{A}}\,\delta\underline{Y}_k$$

Ergibt N skalare Gl. der Form

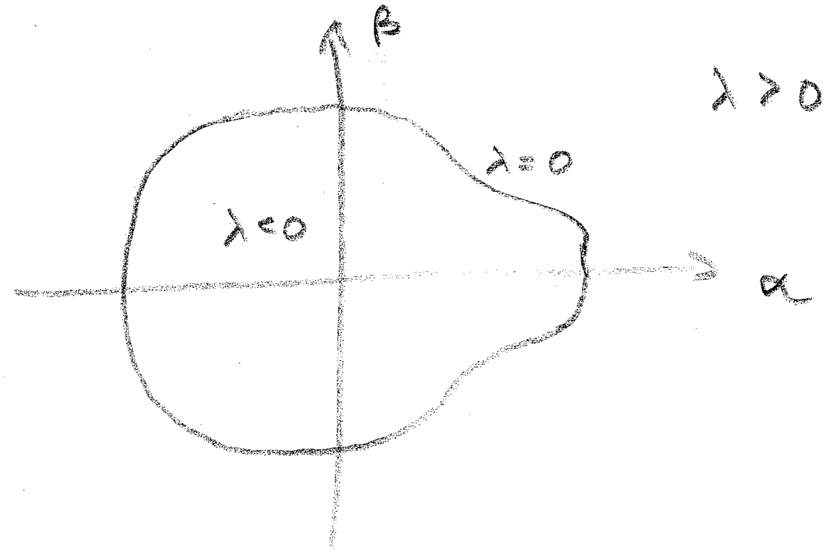
$$\delta y_{k+1} = \left[f'(\bar{x}_k) + \sigma \gamma_i h'(\bar{x}_k)\right]\delta y_k$$

Eigenwerte v. G

<u>Idee:</u> Berechne Lyapunov Exp für

$$\delta y_{k+1} = \left[f'(\bar{x}_k) + (\alpha + i\beta)\,h'(\bar{x}_k)\right]\delta y_k$$

Ergibt eine Fkt. $\lambda(\alpha, \beta)$



- Wenn für alle Eigenwerte gilt $\lambda(\sigma\gamma_k) < 0$, dann klingen alle Störungen ab.
- Es gibt einen Eigenwert $\gamma_0 = 0$ zum Eigenvektor $\underline{v} = (1, 1, \dots, 1)$. Für diesen kann

$$\lambda(\sigma\gamma_0) > 0 \quad \text{sein}$$

$\rightarrow$ synchronisierte Dynamik chaotisch

Tips zu Aufg. 12:

1.) Verwende DFT-Vektor Ansatz

$$\Psi_k = \left(e^{i\frac{2\pi}{N}k\cdot 0}, e^{i\frac{2\pi}{N}k\cdot 1}, e^{i\frac{2\pi}{N}k\cdot 2}, \ldots, e^{i\frac{2\pi}{N}k\cdot (N-1)} \right)$$

der k-te DFT Vektor $\quad k = 0, \ldots, N-1$

Zeige Ψ_i sind Eigenvektoren zur Kopplungsmatrix