

VL: Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD, Dr. Philipp Hövel
UE: Dipl.-Phys. Valentin Flunkert, MSc

2. Übungsblatt zur Nichtlinearen Dynamik und Kontrolle

Abgabe: Mo 10.5. 12:15 in der Übung. Die Abgabe erfolgt in **2er oder 3er Gruppen**.

Aufgabe 3 (10 Punkte): *Homokliner Orbit im Lorenz-System*

Homokline Orbits verbinden Fixpunkte mit sich selbst und lassen sich meist nur numerisch finden. In dieser Aufgabe soll solch eine homokline Verbindung für einen Fixpunkt des Lorenz-Systems gefunden werden.

Betrachten Sie das Lorenz-System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz \\ \dot{z} &= xy - \beta z,\end{aligned}$$

mit $\sigma = 10$ und $\beta = 8/3$.

Wir untersuchen $1 < \rho < 24$. In diesem Parameterbereich gibt es drei Fixpunkte, die wir mit C_0 , C_+ und C_- bezeichnen:

$$\begin{aligned}C_0 &:= (0, 0, 0), \\ C_{\pm} &:= (\pm\xi, \pm\xi, \rho - 1) \quad \text{mit} \quad \xi = \sqrt{\beta(\rho - 1)}.\end{aligned}$$

Die Fixpunkte C_{\pm} sind stabile Foki.

1. Zeigen Sie, dass C_0 und C_{\pm} tatsächlich Fixpunkte sind. Zeigen Sie weiterhin, dass C_0 für $\rho > 1$ ein Sattel mit einer instabilen Richtung und zwei stabilen Richtungen ist. Berechnen Sie den Eigenvektor \mathbf{v} zur instabilen Richtung von C_0 (dies ist der Tangentialvektor an die instabile Mannigfaltigkeit).

Im folgenden soll ein homokliner Orbit von C_0 gefunden werden. Dieser Orbit existiert nur für einen ganz bestimmten Wert $\rho = \rho_*$.

2. Starten Sie die Simulation (für einen Wert von ρ) im Fixpunkt C_0 mit einer kleinen Auslenkung in Richtung von \mathbf{v} . Für $\rho < \rho_*$ landet man in einem der beiden Fixpunkt C_{\pm} und für $\rho > \rho_*$ in dem Anderen (welcher Fixpunkt das genau ist, hängt davon ab, in welche Richtung man \mathbf{v} gewählt hat).

Bestimmen Sie ρ_* auf mindestens vier Nachkommastellen genau, indem Sie die Phasenportraits in der (x, y) -Ebene untersuchen und sich immer näher an ρ_* herantasten (*Tipp:* Intervallschachtelung). Die Simulationen sollten bis ca. $t = 100$ laufen und müssen eine relativ hohe Genauigkeit haben (kleine Schrittweiten).

Plotten Sie das Phasenportrait des homoklinen Orbits (simulieren Sie dazu nur bis ca. $t = 5$).

Bonus: Automatisieren Sie die Suche nach ρ_* mit einer Funktion, die entscheidet, ob man in C_+ oder C_- gelandet ist.

2. Übung SS2010

Aufgabe 4 (10 Punkte): SNIPER

In der VL wurde ein einfaches Model einer SNIPER-Bifurkation (**saddle-node infinite period**) diskutiert. In Polarkoordinaten sind die dynamischen Gleichungen gegeben durch

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1 - r^2), \\ \dot{\phi} &= b - r \cos \phi.\end{aligned}$$

Im folgenden soll nur die Dynamik von ϕ auf dem Kreis mit $r = 1$ untersucht werden (das geht, weil der Kreis eine invariante Mannigfaltigkeit des Systems ist).

1. Untersuchen Sie die Fixpunkte des reduzierten Systems in Abhängigkeit vom Parameter b (Existenz, Position, Stabilität)
2. Finden Sie die Lösungen $\phi(t)$ durch Trennung der Variablen für $b < 1$ und $b > 1$. Benutzen Sie hierfür

$$\int \frac{d\phi}{b - \cos \phi} = \frac{2}{\sqrt{b^2 - 1}} \arctan \left[\frac{(b - 1) \tan \frac{\phi}{2}}{\sqrt{b^2 - 1}} \right] \quad \text{für } b > 1,$$

$$\int \frac{d\phi}{b - \cos \phi} = \frac{1}{\sqrt{1 - b^2}} \log \left[\frac{(1 + b) \tan \frac{\phi}{2} - \sqrt{1 - b^2}}{(1 + b) \tan \frac{\phi}{2} + \sqrt{1 - b^2}} \right] \quad \text{für } b < 1.$$

3. Plotten Sie für die beiden Fälle $b > 1$ und $b < 1$ die Zeitserien für $x(t) = \cos \phi(t)$ mit geeigneten Anfangsbedingungen.