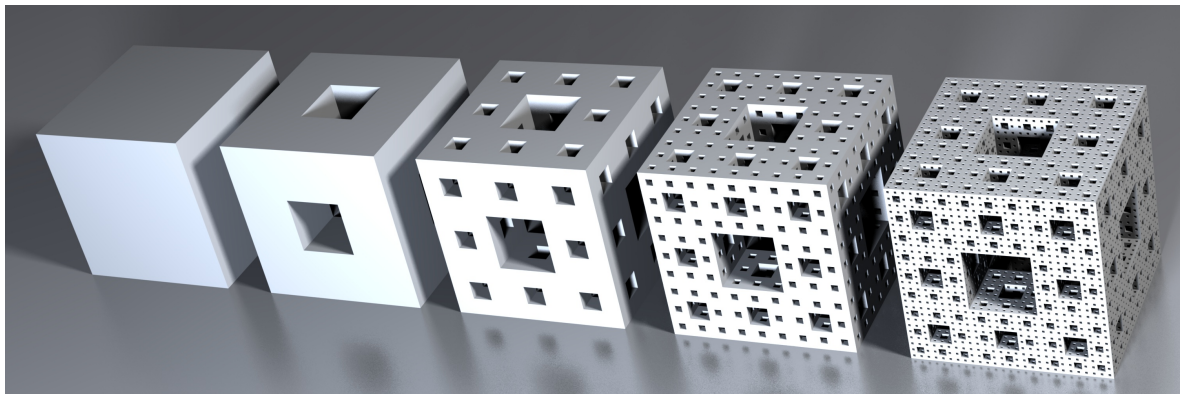


VL: Prof. Dr. Ekehard Schöll, PhD, Dr. Philipp Hövel  
UE: Dipl.-Phys. Valentin Flunkert, MSc

### 3. Übungsblatt zur Nichtlinearen Dynamik und Kontrolle

**Abgabe:** Mo 17.5. 12:15 in der Übung. Die Abgabe erfolgt in **2er oder 3er Gruppen**.

**Aufgabe 5 (8 Punkte):** *Menger-Schwamm und fraktale Dimension*



Der Menger-Schwamm (benannt nach Karl Menger) entsteht, wenn man einen Würfel in  $27 = 3 \times 3 \times 3$  gleich grosse Würfel zerlegt, 7 dieser Würfel entfernt (siehe Abbildung) und dies rekursiv mit den übrig gebliebenen Teilwürfeln wiederholt.

1. Berechnen Sie die Oberfläche  $F_n$  und das Volumen  $V_n$  in Abhängigkeit der Iterationstiefe  $n$  ( $n = 0$  entspricht dem vollen Würfel). Welche Werte ergeben sich im Limes  $n \rightarrow \infty$ .
2. Berechnen Sie die Hausdorffdimension des Menger-Schwamms.

*Bonus:* Schreiben Sie ein Programm, das den Menger-Schwamm bis zur Iterationstiefe  $n$  graphisch darstellt. Bis zu welchem  $n$  schafft es ihr Computer?

**Aufgabe 6 (12 Punkte):** *logistische Abbildung*

In dieser Aufgabe soll die Entsehung von Chaos in der logistischen Abbildung

$$x_{n+1} = f(x_n) := r x_n(1 - x_n), \quad (r \in [0, 4])$$

genauer untersucht werden. Berechnen Sie dazu numerisch ein Bifurkationsdiagramm und ein Diagramm des Lyapunov-Exponenten in Abhängigkeit  $r$ . Untersuchen Sie hiermit:

- Welchen Wert hat der Lyapunov-Exponent, wenn eine Periodenverdopplung auftritt? Was passiert im Bifurkationsdiagramm, wenn der Lyapunov-Exponent positiv wird?
- Es seien  $R_n$  die  $r$  Werte bei den Periodenverdopplungen. Finden Sie (aus dem Bifurkationsdiagramm) die ersten drei oder vier Verhältnisse

$$\delta_n = \frac{R_n - R_{n-1}}{R_{n+1} - R_n}.$$

Stimmen diese mit der universellen Feigenbaumkonstante  $\delta = 4.669\dots$  überein? (Vergrössern Sie nötigenfalls die Genauigkeit in der Nähe der Periodenverdopplungen.)

**Bitte Rückseite beachten! →**

### 3. Übung SS2010

#### *Hinweise für die Numerik:*

Verwenden Sie eine Sequenz von  $r$  Werten aus  $[0, 4]$  mit geeigneter Auflösung. Für jeden  $r$  Wert iterieren Sie die Abbildung numerisch mit einer beliebigen Anfangsbedingung  $x_0$  etwa 400 mal (bis Transienten abgeklungen sind). Danach verwenden Sie etwa 300 weitere Iterationen für das Bifurkationsdiagramm und ca. 2.000 Iterationen für die Lyapunov-Exponenten.

- *Berechnung der Lyapunov-Exponenten:* Bilden Sie (nach der Transienten) den Mittelwert der lokalen Lyapunov-Exponenten  $\ln |f'(x_n)|$  über die ca. 2.000 berechneten  $x_n$ . Plotten Sie diesen Lyapunov-Exponent im Wertebereich  $[-1, 1]$ .
- *Bifurkationsdiagramm:* Plotten Sie (nach der Transienten) die 300 Werte von  $x_n$  über dem entsprechenden  $r$  Wert.

(Verwenden Sie als Bildformat z.B. `png` mit geeigneter Auflösung und keine Vektorgrafik, da sonst die Dateien durch die vielen Daten zu gross werden).