VL: Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD, Dr. Philipp Hövel
UE: Dipl.-Phys. Valentin Flunkert, MSc

6. Übungsblatt zur Nichtlinearen Dynamik und Kontrolle

Abgabe: Mo 14.6. 12:15 in der Übung. Die Abgabe erfolgt in **2er oder 3er Gruppen**.
Bei Numerikaufgaben bitte den Source-Code mit ausdrucken. Abgaben werden per email nur akzeptiert als ein einzelnes `pdf`-File kleiner als 10MB.

Aufgabe 11 (10 Punkte): *Master stability function*

Betrachten Sie N identische eindimensionale Maps, die in einem Netzwerk gekoppelt sind

$$x^i_{k+1} = f(x^i_k) + \sigma \sum_{j=1}^{N} G_{ij}\, h(x^j_k). \tag{1}$$

Hierbei ist f die lokale Dynamik von jedem einzelnen Element, σ ist die Kopplungsstärke, G_{ij} ist die Kopplungsmatrix, die angibt, wie stark der Link $j \to i$ ist, und h ist eine Funktion, die die Kopplung der Elemente beschreibt.
Die *master stability function* (MSF) ist eine Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ und bildet eine complexe Zahl $\alpha + i\beta$ ab auf den (größten) Lyapunov-Exponenten $\lambda_{\max}$, der aus der Variationsgleichung

$$\xi_{k+1} = \left[f'(x^s_k) + (\alpha + i\beta)h'(x^s_k)\right] \xi_k$$

hervorgeht, wobei x^s_k die synchronisierte Dynamik ist. D.h.:

$$\lambda_{\max} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \ln \frac{|\xi_k|}{|\xi_0|}.$$

1. Erklären Sie, warum die Zeilensumme $\sum_{j=1}^{N} G_{ij}$ für alle i gleich sein muss, damit es eine synchronisierte Lösung von Gl. (1) geben kann. Erklären Sie weiterhin, warum man o.B.d.A. $0 = \sum_{j=1}^{N} G_{ij}$ annehmen kann (was wir im folgenden tun). Wie lautet in diesem Fall die Gleichung für die synchronisierte Dynamik?

2. Betrachten Sie nun die gekoppelte logistische Map mit

   $$f(x) := r\,x(1-x), \qquad h(x) := x.$$

   Wählen Sie einen r-Wert im nicht-chaotischen und einen im chaotischen Bereich und berechnen und plotten Sie jeweils die MSF als Funktion von α und β (für geeignete Bereiche). Zeichnen Sie insbesondere die $\lambda_{\max} = 0$ Höhenlinie ein.

   Tipp: Gehen Sie von Ihrer Lösung von Zettel 3 Aufgabe 6 aus und wandeln Sie den Code entsprechend ab um die Lyapunov-Exponenten auszurechnen. Für den Plot können Sie die `matplotlib`-Funktionen `contour` und `contourf` verwenden.

3. Geben Sie für die beiden r-Werte jeweils zwei Beispiel für Netzwerke mit mindestens drei Elementen an (Zeilensumme 0), für die die Synchronisation stabil bzw. instabil ist. Tragen Sie dazu die Eigenwerte $\sigma\gamma_k$ der Matrix σG in den entsprechenden Plot der MSF ein.

4. Simulieren Sie die vier Beispiele direkt und überprüfen Sie so Ihr Ergebnis.

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 12 (10 Punkte): *Eigenwerte von Kopplungsmatrizen*
Berechnen Sie die Eigenwerte der Kopplungsmatrizen für Systeme mit N Einheiten die in folgender Art gekoppelt sind:

1. *unidirektionaler Ring*
   Die Elemente sind unidirektional (in eine Richtung) im Ring miteinander verbunden. Alle Kopplungsstärken sind gleich.

2. *bidirektionaler Ring*
   Die Elemente sind bidirektional (in beide Richtungen) im Ring miteinander verbunden. Alle Kopplungsstärken sind gleich.

3. *all-to-all coupling*
   Jedes Element ist mit jedem Anderen verbunden. Alle Kopplungsstärken sind gleich.

4. *star coupling*
   Ein ausgezeichnetes Element i_0 ist bidrektional mit allen anderen Verbunden. Alle ausgehenden und eingehenden Kopplungen von i_0 sind jeweils gleich. Das Verhältnis von Beiden ist so gewählt, dass die Zeilensumme Konstant ist.