

7. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

Abgabe: Dienstag, den 7. Juni 2011 vor der Übung
Ausgabe: Dienstag, den 24. Mai 2011

Modell eines sphärisch symmetrischen, stationären Sterns I (10 Punkte)

Es soll in dieser Übung die Innenraumlösung der Einsteinschen Feldgleichungen für den Fall eines stationären und rotationssymmetrischen Sterns errechnet werden. Dazu soll angenommen werden, daß sich der Stern durch den Energie-Impuls-Tensor eines idealen Fluids beschreiben läßt.

Gehen Sie dazu von der allgemeinen Form der Metrik für ein zentralsymmetrisches Schwerefeld aus (die Metrik ist zeitunabhängig):

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} c^2 dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2] \quad (1)$$

Berechnen Sie damit die Komponenten des Ricci-Tensors R_{mn} und des Krümmungsskalars $R = g^{mn} R_{mn}$. Diese Rechnung vereinfacht sich stark, wenn man die Transformationsinvarianzen der Metrik betrachtet und daraus Rückschlüsse auf die Transformationsinvarianzen des Ricci-Tensors zieht.

Nachdem Sie die linke Seite der Feldgleichungen ermittelt haben, muß jetzt die rechte Seite ermittelt werden. Nehmen Sie dazu für den Stern den Energie-Impuls-Tensor des idealen Fluids an ($h_{mn} = g_{mn} + u_m u_n / c^2$):

$$T_{mn} = (\mu + p/c^2) u_m u_n + p g_{mn} = \mu u_m u_n + p h_{mn} \quad (2)$$

$\mu(r)$ ist dabei die Massendichte des Sterns, während $p(r)$ den isotropen Innendruck repräsentiert.

Es ist jetzt der Geschwindigkeitsvektor u^m der Sternmaterie zu bestimmen. Da intrastellare Materieströme ausgeschlossen werden sollen, handelt es sich dabei um den Geschwindigkeitsvektor ruhender Materie (in Bezug auf das genutzte Koordinatensystem). Wenn Sie alles in die Feldgleichungen einsetzen, bekommen Sie drei unabhängige DGLen.

Jetzt kann die Integrabilitätsbedingung der Feldgleichungen $\nabla_n T^{mn} = 0$ zu einer einzigen skalaren Gleichung vereinfacht werden. Sie ist von der Form: $p' = p'(\nu', p, \mu)$ mit $' = d/dr$. Berechnen Sie dabei $d\mu/d\tau = u^m \partial_m \mu$, $dp/d\tau = u^m \partial_m p$, sowie $\nabla_m u^m$. Da die Integrabilitätsbedingung eine direkte Folge der Feldgleichungen ist, kann Sie im folgenden anstelle einer dieser zum Einsatz gebracht werden.

Ermitteln Sie im nächsten Schritt $e^{-\lambda}$, indem Sie die „zeit-zeitliche“ Feldgleichung integrieren. Warum muß die auftretende Integrationskonstante gleich Null gesetzt werden?

Setzen Sie das Ergebnis für $e^{-\lambda}$ sowie die oben ermittelte Integrabilitätsbedingung $p' = p'(\nu', p, \mu)$ in die „radiale“ Feldgleichung ($n = m = 1$) ein. Daraus erhalten Sie die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-(TOV)-Gleichung, die wie folgt aussieht:

$$p' = - \left(\mu + \frac{p}{c^2} \right) \frac{\gamma \left(\frac{4\pi}{c^2} p r^3 + m(r) \right)}{r^2 \left(1 - \frac{2\gamma m(r)}{c^2 r} \right)} \quad (3)$$

Sie ist die allgemein-relativistische Verallgemeinerung der Bedingung für das hydrostatische Gleichgewicht des Sterns aus der Newtonschen Theorie.

Indem Sie jetzt die TOV-Gleichung in die Integrabilitätsbedingung einsetzen, kann $\nu(r)$ bestimmt werden. $\nu(r)$ besitzt die Form eines bestimmten Integrals, welches ohne zusätzliche Annahmen nicht integriert werden kann. Begründen Sie, warum $\nu(\infty) = 0$ gesetzt werden muß.

Beachten Sie bei Ihren Rechnungen die folgenden Formeln:

- Feldgleichungen: $R_m^n - \frac{1}{2} R g_m^n = -\kappa T_m^n$
- Ricci-Tensor: $R_{ki} = \partial_k \Gamma_{qi}^q - \partial_q \Gamma_{ki}^q + \Gamma_{kp}^q \Gamma_{qi}^p - \Gamma_{qp}^q \Gamma_{ki}^p$
- Massenfunktion des Sterns: $m(r) := 4\pi \int_0^r \mu(\xi) \xi^2 d\xi$
- Zusammenhang zwischen Newtonscher (γ) und Einsteinscher Gravitationskonstante (κ): $\kappa = \frac{8\pi\gamma}{c^4}$
- ν besitzt am Ende der Rechnung die Form: $\nu(r) = \int_r^\infty (\dots) d\xi$

Eine Kommentierung Ihres Vorgehens wird erwartet! Dafür gibt es auch Punkte!

Sprechstunde: Nach Vereinbarung oder direkt nach der Übung.
 Falls es Fragen gibt, bin ich auch per Mail erreichbar:
 gerold.schellstede@campus.tu-berlin.de