Prof. Dr. Eckehard Schöll, Dr. Kathy Lüdge
Dr. Carsten Weber

7. Übungsblatt – Theoretische Festkörperphysik I,II

Abgabe: Mo. 06.06.2011 bis 17:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 16 (5 Punkte): *Wiederholung 2. Quantisierung*
Betrachten Sie die Lagrangedichte des Schrödingerfeldes:

$$\mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial_\mu \psi, \partial_\nu \psi^*) = -\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla\psi^*)\cdot(\nabla\psi) - \frac{\hbar}{2i}\left(\psi^*\partial_t\psi - (\partial_t\psi^*)\psi\right) - \psi^* V\psi.$$

(a) Zeigen Sie mittels der Euler-Lagrange-Gleichungen, dass daraus die Schrödingergleichung folgt.

(b) Stellen Sie, ausgehend von der Lagrangedichte, die Hamiltondichte und daraus die Hamiltonfunktion auf.

(c) Machen Sie nun den Übergang zu Feldoperatoren $\psi \to \hat{\psi}$ und entwickeln Sie diese in einer beliebigen Basis $\{|\varphi_i\rangle\}$, um den Hamiltonoperator in 2. Quantisierung zu erhalten. Wie sieht der Hamiltonoperator aus, wenn als Basis die Eigenbasis von $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r})$ gewählt wird?

Aufgabe 17 (6 Punkte): *Erwartungswert eines 2-Teilchenoperators*
Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert eines 2-Teilchenoperators gilt:

$$^-\langle\psi|a^\dagger_{\lambda'}a^\dagger_{\mu'}a_\mu a_\lambda|\psi\rangle^- = n_\lambda n_\mu(\delta_{\mu'\mu}\delta_{\lambda'\lambda} - \delta_{\mu'\lambda}\delta_{\lambda'\mu}).$$

Aufgabe 18 (9 Punkte): *Paar-Korrelation*
Betrachten Sie ein homogenes Elektronengas mit der Elektronendichte $n_0 = N/V$ und den orthogonalen Einteilchenzuständen

$$\varphi_{\mathbf{k},s}(\mathbf{r},\sigma) = \frac{1}{\sqrt{V}}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\chi_s(\sigma).$$

Die Paar-Korrelationsfunktion $g_{\sigma_1\sigma_2}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ gibt die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens am Ort $\mathbf{r}_2$ mit Spin σ_2 wieder, wenn sich am Ort $\mathbf{r}_1$ bereits ein Teilchen mit Spin σ_1 befindet:

$$g_{\sigma_1\sigma_2}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = \frac{1}{n_0^2}\sum_{\alpha_i,\alpha_j}\left|\begin{matrix}\varphi_{\alpha_i}(\mathbf{r}_1,\sigma_1) & \varphi_{\alpha_i}(\mathbf{r}_2,\sigma_2)\\ \varphi_{\alpha_j}(\mathbf{r}_1,\sigma_1) & \varphi_{\alpha_j}(\mathbf{r}_2,\sigma_2)\end{matrix}\right|^2.$$

(a) Berechnen Sie $g_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$ und $g_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$. Zeigen Sie dazu, dass sich $g_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$ darstellen lässt als

$$g_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) = \frac{1}{2}\left[1-(\phi(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2))^2\right] \text{ mit } \phi(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) = \frac{2}{N}\sum_{\mathbf{k}}\exp\left[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\right]$$

und führen Sie zur Berechnung von $\phi(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$ den Kontinuumslimes ($T=0$) durch.

(b) Stellen Sie $g_{\uparrow\uparrow}$, $g_{\uparrow\downarrow}$ und $g = g_{\uparrow\uparrow} + g_{\uparrow\downarrow}$ graphisch dar und diskutieren Sie den Grenzfall $\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_1$. Was ist ein Austauschloch?