Technische Universität Berlin, Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. v. Borzeszkowski; Dr. Chrobok; Schellstede

3. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

Abgabe: Dienstag, den 15. Mai 2012 vor der Übung
Ausgabe: Dienstag, den 24. April 2012

Variationsprinzip I (10 Punkte)

1. Für eine geeignete Lagrangedichte $\mathcal{L}$ lassen sich die Einsteinschen Feldgleichungen aus einem Variationsprinzip ableiten, indem nach der Metrik $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ variiert wird, wobei der Raum als Riemannsch vorausgesetzt wird. Die entsprechende Lagrangedichte besitzt die Form:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\,(R - 2\kappa L_R) \quad \text{mit} \quad R = g_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} \quad . \tag{1}$$

Dabei ist R der Ricci-Skalar, κ die Einsteinsche Gravitationskonstante, $R^{\alpha\beta}$ der Ricci-Tensor, sowie L_R die Lagrangefunktion der nichtgravitativen Felder (also des Rests).

Bestimmen Sie also die Einsteinschen Gleichungen aus (S ist die Wirkung):

$$0 = c\,\delta S = \delta \int \mathcal{L}\,\mathrm{d}V_4 \quad \text{mit} \quad \mathrm{d}V_4 := \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4 \quad . \tag{2}$$

Beachten Sie dabei die folgenden Hinweise:

- Zeigen Sie zunächst, daß das folgende Integral mit Hilfe des Gaußschen Satzes in ein Oberflächenintegral umwandelbar ist:

$$\int \sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}V_4 \quad . \tag{3}$$

Dazu ist es sinvoll, in einem ersten Schritt die Palatini-Gleichung abzuleiten:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\mu \delta\Gamma^\alpha_{\lambda\alpha} - \nabla_\alpha \delta\Gamma^\alpha_{\lambda\mu} \quad . \tag{4}$$

Danach ist zu zeigen, daß gilt:

$$\nabla_\alpha \left[\sqrt{-g}g^{\lambda\mu}\right] = 0 \quad . \tag{5}$$

Beachten Sie dabei, daß die kovariante Ableitung einer beliebigen skalaren Dichte vom Gewicht $+1$ (B) gegeben ist durch:

$$\nabla_\nu B = \partial_\nu B - B\Gamma^\lambda_{\lambda\nu} \tag{6}$$

Mit diesen Berechnungen kann jetzt das Volumenintegral (3) in ein Oberflächenintegral umgeformt werden!

Da die Variation der Metrik und ihrer ersten Ableitungen auf dem Rand des Integrationsbereichs verschwinden, kann dann dieses Integral fallen gelassen werden.

- Berechen Sie dann aus dem von (2) verbleibenden Restintegral die Einsteinschen Feldgleichungen. Wie ist dabei der Energie-Impuls-Tensor der Restfelder durch die Variation definiert?

2. Es ist jetzt nach Palatini möglich, den affinen Zusammenhang $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ als unabhängige Variable bei der Variation aufzufassen.

   Zeigen Sie, daß sich aus der Variation der Lagrangedichte (1) nach dem Zusammenhang $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ der Christoffelsche Zusammenhang zwischen $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ und der Metrik $g^{\alpha\beta}$ ergibt:

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, g^{\mu\lambda} \left(\partial_{\beta} g_{\lambda\alpha} + \partial_{\alpha} g_{\lambda\beta} - \partial_{\lambda} g_{\alpha\beta}\right) \tag{7}$$

   Beachten Sie folgende Hinweise:

   - $g^{\mu\nu}$, sowie L_R hängen nicht vom affinen Zusammenhang $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ ab.
   - Bei der Variation nach den $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ behält Gleichung (4) natürlich ihre Gültigkeit!
   - Wandeln Sie das auch hier auftretende Integral (3) **nicht** in ein Oberflächenintegral um!
   - Bei realisierbaren Feldkonfigurationen gilt stets: $\delta S = 0$
   - Es wird Torsionsfreiheit vorausgesetzt: $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$
   - Daß der Raum metrisch ist, also $\nabla_{\alpha} g_{\lambda\mu} = 0$ gilt, ist ein Ergebnis der Palatini-Variation und darf NICHT vorausgesetzt werden.

Sprechstunde: Nach Vereinbarung oder direkt nach der Übung.
Falls es Fragen gibt, bin ich auch per Mail erreichbar:
gerold.schellstede@campus.tu-berlin.de