

7. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

Abgabe: Dienstag, den 12. Juni 2012 vor der Übung
 Ausgabe: Dienstag, den 29. Mai 2012

Aufgabe 1: Energie-Impuls-Tensor einer Gravitationswelle I
 (Aufgaben I+II zusammen 10 Punkte)

Für kleine Abweichungen von der flachen Raumzeit kann die Einsteinsche Theorie linearisiert werden. Die Metrik

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2)$$

soll nun durch die linearen Störungen $h_{\mu\nu}$ beschrieben werden. Für das Gravitationsfeld $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h^\alpha_\alpha \eta_{\mu\nu}$ kann eine freie Wellengleichung abgeleitet werden:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass der in der Vorlesung eingeführte Energie-Impuls-Tensor einer Gravitationswelle

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G} (R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}(g_{\mu\nu}R)^{(2)}) \tag{2}$$

im Falle einer quellenfreien Lösung, äquivalent zu

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{16\pi G} (2R_{\mu\nu}^{(2)} - \eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}^{(2)}) \tag{3}$$

ist. Bitte beachten Sie dabei, dass man in der linearen Näherungen rechnet und eine **freie** Gravitationswelle beschreibt.

Aufgabe 2: Energie-Impuls-Tensor einer Gravitationswelle II

Nach der in der 1. Aufgabe berechneten Abhängigkeit des Energie-Impuls-Tensors der freien Gravitationswelle vom Ricci-Tensor 2. Ordnung ist nun dessen Bestimmung notwendig.

a) Zeigen Sie, dass

$$R_{\mu\kappa}^{(2)} = \eta^{\lambda\nu}R_{\lambda\mu\nu\kappa}^{(2)} - h^{\lambda\nu}R_{\lambda\mu\nu\kappa}^{(1)} \tag{4}$$

für $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ bzw. $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$ gilt!

b) Zeigen Sie mit Hilfe von Gleichung (4), der Definition des Krümmungstensors

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}(g_{\lambda\nu,\mu,\kappa} + g_{\mu\kappa,\lambda,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda,\kappa} - g_{\lambda\kappa,\mu,\nu}) + g_{\eta\sigma}(\Gamma_{\nu\lambda}^\eta\Gamma_{\mu\kappa}^\sigma - \Gamma_{\kappa\lambda}^\eta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma) \tag{5}$$

und den Christoffelsymbolen 1. Ordnung (Warum?)

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}(h^\sigma_{\mu,\nu} + h^\sigma_{\nu,\mu} - h_{\mu\nu}{}^{,\sigma}), \tag{6}$$

dass der Ricci-Tensor 2. Ordnung die Form

$$R_{\mu\kappa}^{(2)} = -\frac{1}{4}(h_{\sigma\kappa,\nu} + h_{\sigma\nu,\kappa} - h_{\kappa\nu,\sigma})(h_\mu{}^{\sigma,\nu} + h^{\sigma\nu}{}_{,\mu} - h_\mu{}^{\nu,\sigma}) - \frac{h^{\lambda\nu}}{2}(h_{\lambda\nu,\mu,\kappa} + h_{\mu\kappa,\lambda,\nu} - h_{\mu\nu,\lambda,\kappa} - h_{\lambda\kappa,\mu,\nu}). \tag{7}$$

hat. Es ist dabei zu beachten, dass $h_{\mu\nu}$ Lösung der freien Wellengleichung ist für die die Eichbedingung $2h^\nu{}_{\mu,\nu} = h^\nu{}_{\nu,\mu}$ gilt. Ansonsten Terme höherer Ordnung vernachlässigen.

Eine Kommentierung Ihres Vorgehens wird erwartet! Dafür gibt es auch Punkte!