

3.5. Vielmodenbetrieb der

Laser - Grundgleichungen

$$(I) \quad \dot{a}_\lambda = (-i\omega_\lambda - \kappa_\lambda) a_\lambda - i \sum_n g_{\lambda n} \rho_n \quad \text{Feld}$$

$$(II) \quad \dot{\rho}_n = (-i\bar{\omega}_n - \gamma_n) \rho_n + i \sum_\lambda g_{\lambda n} a_\lambda d_n \quad \text{Polaris.}$$

$$(III) \quad \dot{d}_n = \frac{d_0 - d_n}{T} + 2i \sum_\lambda (g_{\lambda n}^* \rho_n a_\lambda^* - g_{\lambda n} a_\lambda \rho_n^*) \quad \text{Inversion}$$

Bisher haben wir folgende Fälle betrachtet

- keine inhomogene Breite
nur eine Mode

\Rightarrow 1. und 2. Laserschwelle
Lorenz Gleichungen

- viele Moden ohne Phasenzorrelationen

$$a_\lambda = \varepsilon_\lambda e^{i\Omega_\lambda + \varphi_\lambda}$$

hier gilt: $\overline{a_\lambda^* a_{\lambda'}} = S_\lambda \delta_{\lambda\lambda'}$

$$= |\varepsilon_\lambda^* \varepsilon_{\lambda'}| e^{i(\Omega_\lambda - \Omega_{\lambda'})t}$$

$$\cdot \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^2} \int d\varphi_\lambda \int d\varphi_{\lambda'} e^{i(\varphi_\lambda - \varphi_{\lambda'})}}_{=0 \text{ für } \varphi_\lambda \neq \varphi_{\lambda'} \text{ also ohne Phasenzorrelation}}$$

=> aus Grundgleichungen folgen Bilanzgleichungen wenn Polarisation eliminiert wird ($\dot{p}=0$)

→ schon untersucht in 2.3.

nach zu tun

- viele Moden mit Phasenzorrelationen

3.5.1. Zeitabhängige Lösung und Modenkopplung

Annahme : keine zu hohen Pumpstärken

mögliche Methode : Numerisch (Integration von Gl. I-III)

analytische Methode : Iterative Lösung

Start $d_n^{(0)}$ \longrightarrow $\dot{p}_n = (-i\bar{\omega}_n - \mu) p_n + i \sum_{\lambda} g_{\lambda n} a_{\lambda} d_n$

1. Iteration :

$\begin{matrix} d_n^{(1)} \\ \uparrow \\ \text{aus} \\ d_n=0 \end{matrix}$

$\dot{d}_n = \frac{d_s - d_n}{T} + 2 \sum_{\lambda} (i g_{\lambda n} p_n a_{\lambda}^* + c.c.)$

j -te Iteration :

$p_n^{(j)}$
aus
 $\dot{p}_n=0$

Ansatz $a_{\lambda}(t) = \epsilon_{\lambda}(t) e^{-i\Omega_{\lambda}t}$

Ergebnis von $p_n^{(j)}$
in Feldgleichung (I)

0. Näherung $d_n^{(0)} = d_0$ ungesättigte Inversion

1. Iteration $p_n^{(1)} = \sum_{\lambda'} \frac{d_0 g_{\lambda'n} \epsilon_{\lambda'}}{\bar{\omega}_n - \Omega_{\lambda'} - i\gamma_{\lambda'}} e^{-i\Omega_{\lambda'}t}$

Taylor für kleine Intensitäten

$\Rightarrow d_n^{(1)} \downarrow = d_0 \left(1 - 2 \sum_{\lambda\lambda'} (g_{\lambda n}^* g_{\lambda' n} a_{\lambda}^* a_{\lambda'}) D_{\lambda\lambda}^n + c.c. \right)$

↑

$$d_n = \frac{d_0}{1 + 2T \sum_{\lambda} a_{\lambda}^* \dots} \approx d_0 \left(1 - 2T \sum_{\lambda} \dots \right)$$

mit $D_{\lambda\lambda'}^n = - \frac{i}{\bar{\omega}_n - \Omega_{\lambda'} - i\gamma_{\lambda'}} \frac{1}{1/T + i(\Omega_{\lambda} - \Omega_{\lambda'})}$

2. Iteration
$$p_n^{(2)} = d_0 \sum_{\lambda} \frac{g_{\lambda n}}{\bar{\omega}_n - \Omega_{\lambda} - i\gamma} \boxed{a_{\lambda}} - 2d_0 \sum_{\lambda \lambda' \lambda''} i g_{\lambda n} g_{\lambda' n}^* g_{\lambda'' n}$$

⇕

lineare
Suszeptibilität
 $P = \chi^{(1)} \boxed{E}$

⇕

$\boxed{a_{\lambda} a_{\lambda'}^* a_{\lambda''}}$ · $M_{\lambda \lambda' \lambda''}^n$

⇕

nichtlineare
Suszeptibilität
 $P = \chi^{(3)} \boxed{E^3}$

⇕
setzt und
einsetzen

Nächster Schritt:

Einschzen in die Feldgleichung

$$\dot{a}_\lambda = (-i\omega_\lambda - \kappa_\lambda) a_\lambda - i \sum_{n\lambda'} \frac{g_{\lambda n}^* g_{\lambda' n}}{\bar{\omega}_n - \Omega_{\lambda'} - i\gamma} a_{\lambda'} d_0$$

$$- 2d_0 \sum_{n\lambda_1\lambda_2\lambda_3} g_{\lambda n} g_{\lambda_1 n} g_{\lambda_2 n}^* g_{\lambda_3 n} a_{\lambda_1} a_{\lambda_2}^* a_{\lambda_3} M_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}^n$$

nichtlineare treibende Kraft
 enthält Terme der Form
 $e^{-i(\Omega_{\lambda_1} - \Omega_{\lambda_2} + \Omega_{\lambda_3})t}$

→ Modenzopplung möglich
 (ohne zusätzliche Modulation)
 (nur über nichtlin. Suszeptibilität)

Spezialfälle :

(i) 1 Mode

$$\Rightarrow d_n^{(1)} = d_0 \left(1 - 2 |\alpha|^2 |g \lambda_n|^2 \frac{2 \gamma T}{(\bar{\omega}_n - \Omega_n)^2 + \gamma^2} \right) = d_0 (1 - 2 T W_{\lambda_n} |\alpha|^2)$$

Lochbrennung!

⊕ Feldgleichung liefert dynamische Frequenzverschiebung
(wie in 3.4.1.)

(ii) 2 Moden: λ_1, λ_2

Lochbrennen



$$\Rightarrow d_n^{(1)} = d_0 \left(1 - 2 T W_{\lambda_1 n} |\alpha_1|^2 - 2 T W_{\lambda_2 n} |\alpha_2|^2 \right.$$

$$\left. - 2 g_1^* g_2 D_{12}^n \underline{\underline{a_1^* a_2}} - 2 g_2^* g_1 D_{21}^n \underline{\underline{a_2^* a_1}} + c.c. \right.$$

$$e^{i(\Omega_1 - \Omega_2)t}$$

$$e^{i(\Omega_2 - \Omega_1)t}$$



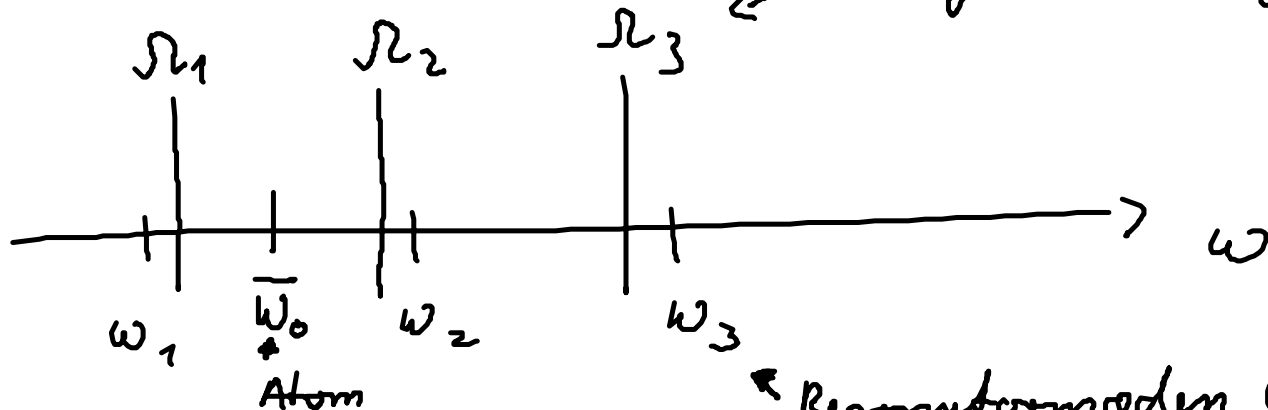
→ d_n zeigt Inversionspulsationen

Ursache: Phasenzopplung (kann nicht mit Bilanzgl. erklärt werden)

⊕ Feldgleichung enthält nichtlineare Modenzopplung

(iii) 3 Moden

(Bsp)



$$\left[e^{i(\underbrace{\Omega_{\lambda_1} - \Omega_{\lambda_2} + \Omega_{\lambda_3}}_{\text{erzeugt Mode } \lambda_2 \text{ falls}}) t} \right]$$

d.h. bei gezielter Wahl der Moden, z.B. $\Omega_2 - \Omega_1 = \Omega_3 - \Omega_2$

β es zu einer starren Frequenzkopplung kommen.

siehe Haken „Laser Light Dynamics“

3.5.2. Andere Methoden der Modenkopplung -

• Methode der zeitlichen Modenkopplung

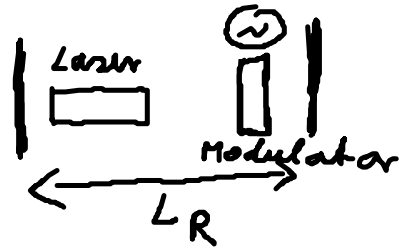
• Modulation der optischen Verluste

z.B. akusto optischer Modulator

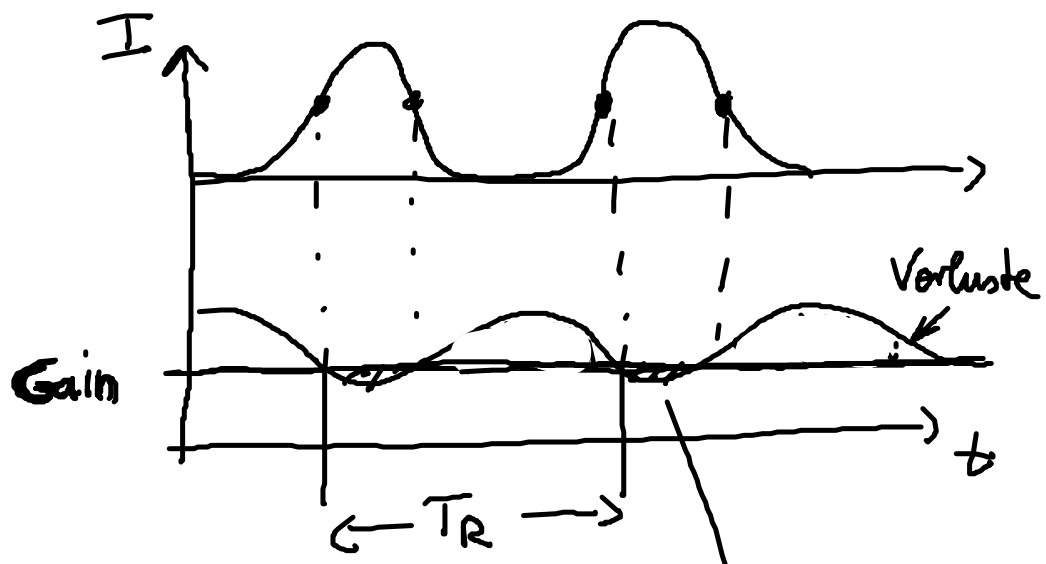
$$\text{d.h. } k = k_0 + k_1 \sin \omega_R t$$

→ die Kopplung $k(t) a(t)$ in der Feldgleichung

erzeugt Seitenbänder $\omega_0 \pm n\omega_R$ zur Grundfrequenz ω_0 .



Zeitbild

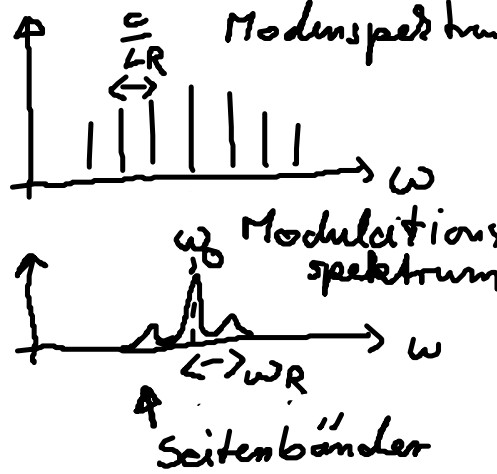


insgesamt $\text{Gain} > \text{Verluste}$
Zeitfenster für Verstärkung

Nachteil:

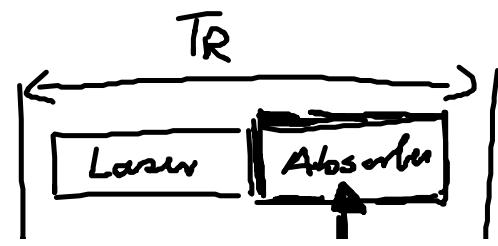
gute Abstimmung auf Umlauffrequenz nötig!

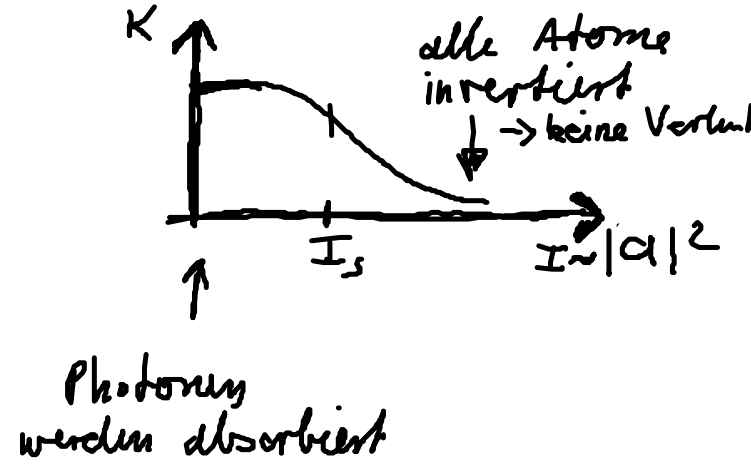
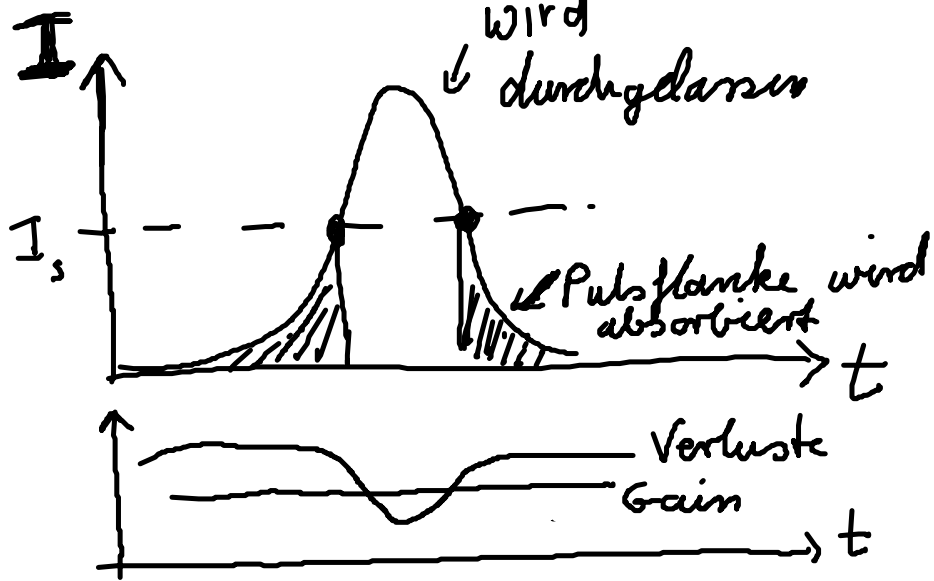
Frequenzbild



● passive Modenkopplung
mit schnellem Absorber

Zeitbild

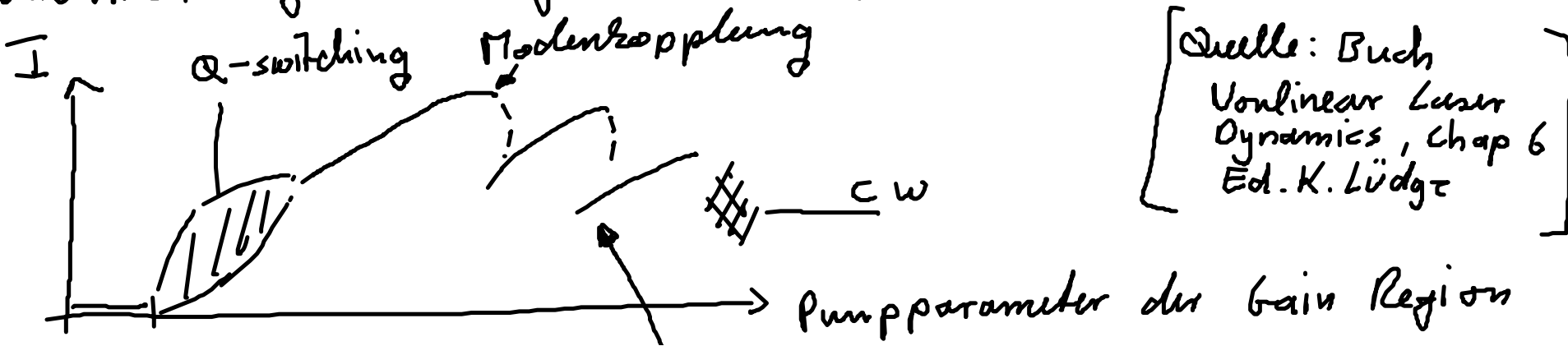




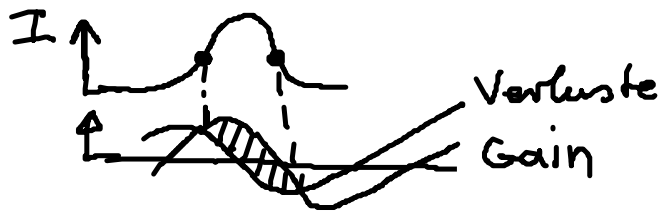
\rightarrow bei jedem Durchgang wird der Puls schmaler
 (begrenzt durch Bandbreite des Gain Spektrums)

• Modenkopplung mit langsamen Absorber (Gain wird auch zeitabhängig)

Numerisch ergibt sich folgendes Bifurkationsdiagramm (Schema)



Zahlbild



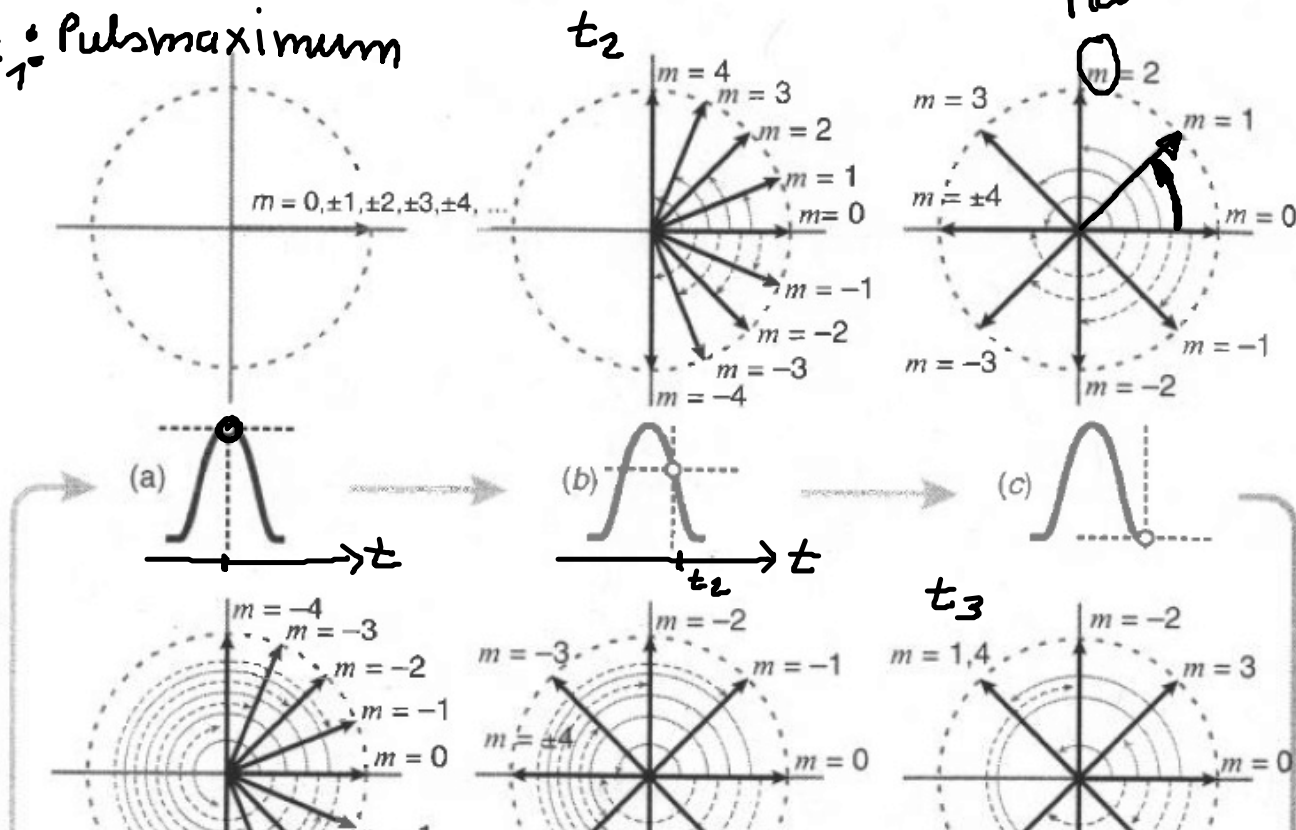
harmonische Modenkopplung auf zweifacher Umlaufzeit

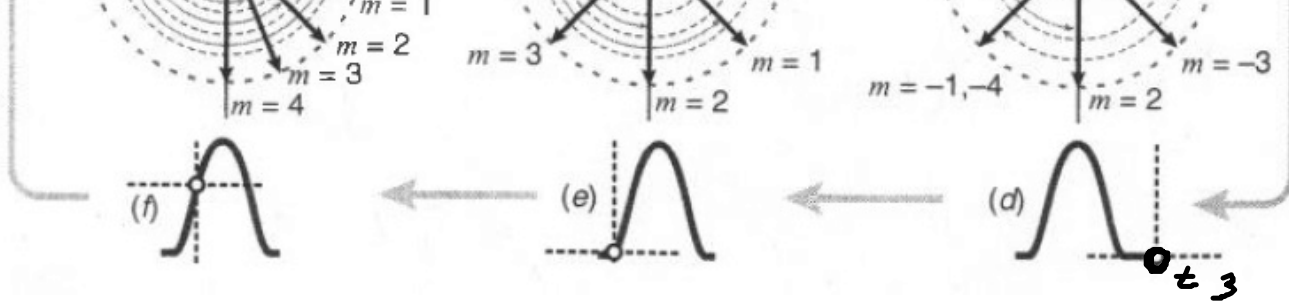
● Veranschaulichung der Modenkopplung in der Ebene des komplexen E-Feldes:

t_1 : Pulsmaximum

Modenindex λ

Rotation mit Frequenz Ω_m





z_3 : Pulsminimum
(destruktive Überlagerung)

(Quelle: Buch
Goldren & Corzine)

Bemerkung:

- Analytische Lösung für aktive Modenkopplung ist eine
Gauß Linienform

- passive Modenkopplung mit schnellem Absorber liefert
 sech^2 Linienform

- passive Modenkopplung mit langsamen Absorber kann
komplexe Linienform liefern
Beschreibung mit Delay-Gleichungsmodell möglich
[Opt. Lett. 29, (2004) 1221, A. Vladimirov]